تفرقی مساواتیں

ایڈورڈ کے تکملی احصا کے آخری پانچ بابوں کا اردو ترجمہ

از

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے

پروفیسر ریاضیات، کلیۂ جامعۂ عثمانیہ

حیدرآباد دکن

۱۳۴۱ھ م ۱۳۳۲ف م ۱۹۲۳ء

فہرست مضامین

تفرقی مساواتیں

تفرقی مساواتیں

باب اوّل

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

متغیر جدائی پذیر۔ خطی مساواتیں

۱۔ تکملی احصا کے اختتام پر چند معمولی قسم کی تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کے عام طریقوں کا سرسری ذکر کر دینا مقصود ہے، اس طرح کی مساواتیں طالب علم کو تحلیلی سکونیات، ذرہ کے علم حرکت اور استوار اجسام کے علم حرکت (کے ابتدائی حصوں) کے مطالعہ میں کار آمد ہوں گی۔

اِس جگہ ہم اُن تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کی مطلق کوشش نہیں کرینگے جن میں جزوی، تفرقی سر شامل ہوتے ہیں۔

۲۔ تفرقی مساوات کی تکوین

ذراسی دیر کے لئے ہم اس موضوع پر غور کریں گے کہ تفرقی مساوات کس طرح پیدا ہوتی ہے اور اس کے "حل" کی نوعیت کیا ہونی چاہئے۔

اس طرح کی مساوات

ف (لا، ما، ا) = ۰ .... (۱)

جس میں تفاعل کی شکل معلوم ہے منحنیات کے ایک خاص قبیل کو تعبیر کرتی ہے، اس قبیل کے کسی ایک رکن کے لئے ا کی ایک خاص قیمت ہے جو ایک ہی منحنی کے تمام نقاط کے لئے وہی رہتی ہے لیکن اس قبیل کے مختلف منحنیات کے لئے مختلف ہے۔

علم ریاضی میں ایسے سوالات اکثر واقع ہوتے ہیں جن میں منحنیات کے پورے قبیل پر بالتمام عمل کرنا مقصود ہوتا ہے۔

مثلاً ایک سوال یہ ہے، منحنیات کا ایک ایسا قبیل معلوم کرو جس کا ہر ایک رکن ایک معلومہ قبیل کے ہر ایک رکن کو ایک زاویہ معلومہ (مثلاً زاویہ قائمہ) پر قطع کرے۔ ظاہر ہے کہ اس طرح کے عملوں میں منحنی کو مخصوص کرنے والا حرف ا تفاعیل زیر بحث میں بطور ایک مستقل مقدار کے واقع نہیں ہونا چاہئے ورنہ پورے قبیل پر ایک ساتھ عمل کرنے کی بجائے ہم اس قبیل کے ایک خاص رکن پر عمل کر رہے ہونگے۔ ا اس طرح ساقط ہو سکتا ہے:۔

مساوات کو ا کے لئے حل کرو اور اسے شکل ذیل میں لکھو

فہ (لا، ما) = ا .... (۲)

بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے ا نکل جاتا ہے اور (۱) کی بجائے ایک مساوات لا، ما اور ما، میں حاصل ہوتی ہے۔

یہ ممکن ہے کہ تفرقی مساوات کے بنانے میں ا کے لئے مساوات حل نہ ہو سکے۔ اس صورت میں

مساوات ف (لا، ما، ا) = ۰ .... (۱)

کا بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \times \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۰ \quad .... (۳)$$

اب مساواتوں (۱) اور (۳) سے ا کو ساقط کرنے سے ایک ربط لا، ما، ما' میں حاصل ہوتا ہے جو سارے قبیل کے لئے درست ہے۔ مثال کے طور پر خطوط مستقیم کے ایک ایسے قبیل پر غور کرو جو مساوات

ما = م لا

میں اختیاری مستقل م کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

م کے لئے حل کرنے سے ما/لا = م

تفرق کرنے سے (لا ما' − ما)/لا^۲ = ۰

یا ما = لا ما'

یا بطرز دیگر م کے لئے حل کرنے کے بغیر

ما' = م

اس لئے ما = لا ما'

یہ مساوات اُن تمام خطوط مستقیم کی تفرقی مساوات ہے جو مبدأ میں سے گذرتے ہیں اور اس کا ہندسی مفہوم یہ ہے کہ مبدأ میں سے گذرنے والے کسی خط مستقیم کی سمت اُس کے کسی نقطہ پر وہی ہے جو اس نقطہ اور مبدأ کو ملانے والے سمتی کی ہے۔

۳۔ اب فرض کرو کہ منحنیات کے قبیل کو تعبیر کرنے والی مساوات

ف (لا، ما، ا، ب) = ۰ .... (۱)

ہے جس میں دو اختیاری مستقل ا، ب ہیں اور قبیل کے مختلف منحنی ان مستقلات کو مختلف قیمتیں دینے سے حاصل ہوتے ہیں۔ بلحاظ لا کے اوپر کی مساوات کا ایک دفعہ تفرق کرنے سے لا، ما، ما'، ا، ب میں ایک ربط حاصل ہوگا فرض کرو کہ یہ ربط ہے

فہ (لا، ما، ما'، ا، ب) = ۰ .... (۲)

اگر ایک دفعہ اور بلحاظ لا کے اس کا تفرق کیا جائے تو
لا، ما، ما۱، ما۲، ا، ب میں ایک ربط ملے گا، فرض کرو کہ یہ حسب ذیل ہے

صہ (لا، ما، ما۱، ما۲، ا، ب) = ۰ .... (۳)

ان تین مساواتوں سے ا، ب ساقط ہو سکتے ہیں کم از کم نظری لحاظ سے (اگر یہ پہلے سے عمل تفرق میں ساقط نہیں ہو چکے)، اس طرح لا، ما، ما۱، ما۲ کو باہم منسلک کرنے والا ایک ربط مثلاً

ف (لا، ما، ما۱، ما۲) = ۰

حاصل ہوگا جو قبیل مفروض کی تفرقی مساوات ہوگی۔

۴ ۔ مساوات کا رتبہ

تعریف کے طور پر ہم اسے مان لیتے ہیں کہ تفرقی مساوات کا رتبہ اُس اعلیٰ ترین تفرقی سر سے متعین ہوتا ہے جو اس میں واقع ہوتا ہے۔ ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ اگر دو مجہولوں کی کسی مساوات میں ایک اختیاری مستقل واقع ہو تو اس مستقل کو ساقط کرنے پر پہلے رتبہ کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے اور اگر مساوات میں دو اختیاری مستقل واقع ہوں تو انہیں ساقط کرنے پر دوسرے رتبہ کی مساوات حاصل ہوتی ہے۔
یہ استدلال بالکل عام ہے، ن اختیاری مستقلات کو ساقط کرنے کیلئے ہمیں ن دفعہ تفرق کرنا ہوگا اور اس طرح لا، ما، ما۱، ما۲ ..... ما ن کو باہم ربط دینے والی ایک تفرقی مساوات حاصل ہوگی جس کا رتبہ صریحاً ن ہوگا۔

مثال ۱ ۔ مساوات لا۲ + ما۲ = ۲ ا لا + ج سے ا اور ج کو ساقط کرو۔

تفرق کرنے سے لا + ما ما۱ = ا

دوبارہ تفرق کرنے سے ۱ + ما۱۲ + ما ما۲ = ۰

صرف عمل تفرق سے ہی مستقل غائب ہو چکے ہیں، اور یہ دوسرے

رتبہ کی تفرقی مساوات ہے (واضح ہو کہ بڑے سے بڑا تفرقی سر اس میں ما$_2$ ہے) جو اُن تمام دائروں سے متعلق ہے جن کے مرکز لا، محور پر واقع ہوتے ہیں ۔

مثال ۲ ۔ اُن تمام مرکزدار مخروطی تراشوں کی تفرقی مساوات معلوم کرو جن کے محور محددوں کے محوروں پر منطبق ہوتے ہیں ۔

مخروطیوں کے اس قبیل کے کسی ایک رکن کی نمونہ کی مساوات ہوگی

ا لا^2 + ب ما^2 = ۱

تفرق کرنے سے ا لا + ب ما ما$_1$ = ۰

دوبارہ تفرق کرنے سے ا + ب (ما$_1^2$ + ما ما$_2$) = ۰

جس سے لا (ما$_1^2$ + ما ما$_2$) − ما ما$_1$ = ۰

مطلوبہ تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے ۔

۵ ۔ عمل اسقاط الٹ نہیں سکتا ۔

بالعموم اوپر کا عمل اسقاط الٹ نہیں سکتا اور جب ایک قبیل کی تفرقی مساوات دی ہوئی ہو اور ہم اس کے کسی ایک رکن کی نمونہ کی مساوات معلوم کرنا چاہیں تو ہمیں عمل تکمل کی طرح چند معیاری صورتوں سے کام لئے بغیر چارہ نہیں ہوتا اور کئی مساواتیں ایسی پیدا ہوتی ہیں جنہیں ہم مطلق حل نہیں کر سکتے ۔

تاہم اوپر کی دفعات سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ اگر ن ویں رتبہ کی تفرقی مساوات کو حل کرنا مقصود ہو تو ہمیں لا، ما اور ن اختیاری مستقلات میں ایک ایسا جبریہ ربط معلوم کرنا چاہئے کہ ان مستقلات کو ساقط کرنے پر مفروضہ تفرقی مساوات حاصل ہو سکے ۔ ایسا جبریہ ربط مساوات کا عام سے عام حل خیال کیا جاتا ہے ۔

پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

٦ - انکی پانچ معیاری صورتیں ہیں

صورت اول - متغیر جدائی پذیر

وہ تمام مساواتیں جن میں فر لا اور لا والی تمام رقمیں مساوات کے ایک طرف اور فر ما اور ما والی تمام رقمیں دوسری طرف لائی جاسکیں اس صورت کے تحت میں آتی ہیں اور تکمل کرنے سے فوراً حل ہوسکتی ہیں

مثال ۱ - مثلاً اگر $\text{قط ما} = \text{قط لا}\ \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

تو $\text{جم لا فر لا} = \text{جم ما فر ما}$

تکمل کرنے سے ربط $\text{جب لا} = \text{جب ما} + \text{ر}$

حاصل ہوتا ہے جس میں ایک اختیاری مستقل ر شامل ہے۔

مثال ۲ - اگر $\frac{\text{لا}^{2} + 1}{\text{ما} + 1} = \text{لا ما}\ \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

تو $\left(\text{لا} + \frac{1}{\text{لا}}\right) \text{فر لا} = \left(\text{ما}^{2} + \text{ما}\right) \text{فر ما}$

اس لئے $\frac{\text{لا}^{2}}{2} + \text{لوک لا} = \frac{\text{ما}^{3}}{3} + \frac{\text{ما}^{2}}{2} + \text{ر}$

جس میں ایک اختیاری مستقل ر شامل ہے۔

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

۱ - $\text{لا جم}^{2}\ \text{ما فر لا} = \text{ما جم}^{2}\ \text{لا فر ما}$

۲- $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}^2 + \text{لا} + 1}{\text{ما}^2 + \text{ما} + 1}$

۳- $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ما}^2 + \text{ما} + 1}{\text{لا}^2 + \text{لا} + 1} = 0$

۴- ثابت کرو کہ مثال ۳ کے قبیل منحنیات کا ہر ایک رکن مثال ۲ کے ہر رکن کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔

۵- $\text{لا ما}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1 + \text{ما}^2}{1 + \text{لا}^2}\left(1 + \text{لا} + \text{لا}^2\right)$

۶- $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ہ}^{\text{لا} - \text{ما}} + \text{لا}^2\,\text{ہ}^{-\text{ما}}$

۷- ثابت کرو کہ وہ تمام منحنی جن میں عماد کا مربع سمتی نیم قطر کے مربع کے مساوی ہے یا تو دائرے ہیں یا قائم زائد۔

۸- ثابت کرو کہ ایک ایسا منحنی جس کے کسی نقطہ پر کا مماس اس نقطہ کے سمتی نیم قطر کے ساتھ مستقل زاویہ (عہ) بنائے صرف اس جماعت

$\text{ر} = \text{ا}\,\text{ہ}^{\text{طہ مم عہ}}$ سے متعلق ہو سکتا ہے۔

۹- اُن منحنیات کی مساواتیں معلوم کرو جن میں

(۱) کارٹیزی زیر مماس مستقل ہو

(۲) کارٹیزی زیر عماد مستقل ہو

(۳) قطبی زیر مماس مستقل ہو

(۴) قطبی زیر عماد مستقل ہو

۱۰- اس منحنی کی کارٹیزی مساوات معلوم کرو جس کے مماس کا طول مستقل ہو۔

صورت دوم - خطی مساواتیں

حسب ذیل شکل کی مساوات

$\text{ما}_{\text{ن}} + \text{ف}\,\text{ما}_{\text{ن}-1} + \text{ق}\,\text{ما}_{\text{ن}-2} + \dots + \text{ک}\,\text{ما} = \text{ر}$

جہاں ف، ق ... ک، ر متغیر لا کے تفاعل یا مستقل مقداریں ہیں خطی مساوات کہلاتی ہے، اس مساوات کی خصوصیت یہ ہے کہ اس میں تفرقی سروں کی ایک سے بڑی قوت شریک نہیں ہوتی

فی الحال چونکہ ہم پہلے رتبہ کی تفرقی مساواتوں پر غور کر رہے ہیں اس لئے خطی مساوات کی صورت زیر بحث یہ ہوگی

ما، + ف ما = ق

اگر اس کے دونوں جانب و^∫ف فرلا سے ضرب دیدیا جائے تو مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

د/فرلا (ما و^∫ف فرلا) = ق و^∫ف فرلا

پس ما و^∫ف فرلا = ∫ ق و^∫ف فرلا فرلا + ر

یہ لا، ما کا باہمی ربط تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے اور اس میں ایک اختیاری مستقل شامل ہوتا ہے۔ اس لئے یہ مطلوبہ حل ہے۔

جزو ضربی و^∫ف فرلا کے ساتھ ضرب دینے سے مساوات کے دائیں جانب کا رکن پورا تفرقی سر ہو جاتا ہے، اس لئے اسے "تکمل جزو ضربی" کہتے ہیں۔

مثال ۱۔ ما، + لا ما = لا کو تکمل کرو۔

تکمل جزو ضربی یہاں و^∫لا فرلا یا و^(لا²/۲) ہے اور اس لئے مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

د/فرلا (ما و^(لا²/۲)) = لا و^(لا²/۲)

یا　ما و^(لا²/۲) = و^(لا²/۲) + ر

یعنی $\text{ما} = \text{ا} + \text{ر}\ \text{تو}^{-\frac{\text{لا}^{2}}{۲}}$

مثال ۲ - $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \frac{۱}{\text{لا}}\ \text{ما} = \text{لا}^{2}$ کو تکمل کرو۔

اس جگہ تکمل جزو ضربی $\text{تو}^{\text{کر}\frac{۱}{\text{لا}}\text{فر لا}} = \text{تو}^{\text{لوک لا}} = \text{لا}$ ہے اور مساوات

اس طرح لکھی جا سکتی ہے $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{لا ما}) = \text{لا}^{3}$

اور $\text{لا ما} = \frac{\text{لا}^{4}}{۴} + \text{ر}$ یا $\text{ما} = \frac{\text{لا}^{3}}{۴} + \frac{\text{ر}}{\text{لا}}$

۸- ایسی مساواتیں جو خطی صورت میں تحویل ہو سکتی ہیں

کئی مساواتیں جو دیکھنے میں خطی شکل

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ف ما} = \text{ق}$$

کی نہ ہوں متغیروں کو بدلنے سے فوراً اس شکل میں لائی جا سکتی ہیں۔
ایک مشہور صورت ذیل میں مندرج ہے

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ف ما} = \text{ق ما}^{\text{ن}}$$

$$\text{یا}\quad \text{ما}^{-\text{ن}}\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ف ما}^{-\text{ن}+۱} = \text{ق}$$

$$\text{رکھو}\quad \text{ما}^{۱-\text{ن}} = \text{ی}$$

$$\text{تو}\quad \text{ما}^{-\text{ن}}\ \text{فر ما} = \frac{\text{فر ی}}{۱-\text{ن}}$$

$$\text{یا}\quad \frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}} + (۱-\text{ن})\ \text{ف ی} = \text{ق}\ (۱-\text{ن})$$

جو ایک خطی مساوات ہے اور اس کا حل یہ ہے

ی و^(۱−ن)∫ف ڈلا = (۱−ن) ∫ق و^(۱−ن)∫ف ڈلا ڈلا + ا

یعنی ما^(۱−ن) و^(۱−ن)∫ف ڈلا = (۱−ن) ∫ق و^(۱−ن)∫ف ڈلا ڈلا + ا

مثال ۱۔ ڈما/ڈلا + ما/لا = ما² کو تکمیل کرو

یہاں ما^(−۲) ڈما/ڈلا + ما^(−۱)/لا = ۱

یا ۱/ما = ی رکھنے سے

ڈی/ڈلا − ی/لا = −۱

اور چونکہ یہاں جزوِ ضربی و^(−∫۱/لا ڈلا) = و^(−لوک لا) = ۱/لا ہے

اس لئے ڈ/ڈلا (ی/لا) = −۱/لا

یعنی ی/لا = لوک ۱/لا + ا

یعنی ۱/ما = الا − لا لوک لا

مثال ۲۔ مساوات ڈما/ڈلا + لا جب ۲ما = لا³ جم² ما کو تکمیل کرو

جم² ما پر تقسیم کرنے سے

قط² ما ڈما/ڈلا + ۲ لا مس ما = لا³

رکھو مس ما = ی

تب $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + ۲\,\text{لا ی} = \text{لا}^{۳}$

متکمل جزوِ ضربی $\text{و}^{\int ۲\,\text{لا فرلا}}$ ہے، اس لئے

$$\text{ی و}^{\text{لا}^{۲}} = \int \text{لا}^{۳}\,\text{و}^{\text{لا}^{۲}}\,\text{فرلا} + \text{ا}$$

فرض کرو کہ $\text{لا}^{۲} = \text{سہ}$

تب $۲\,\text{لا فرلا} = \text{فرسہ}$

پس $\int \text{لا}^{۳}\,\text{و}^{\text{لا}^{۲}}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\int \text{سہ و}^{\text{سہ}}\,\text{فرسہ}$

$$= \frac{۱}{۲}\,\text{و}^{\text{سہ}}\,(\text{سہ} - ۱)$$

پس مس $\text{ما} \times \text{و}^{\text{لا}^{۲}} = \frac{۱}{۲}\,\text{و}^{\text{لا}^{۲}}\,(\text{لا}^{۲} - ۱) + \text{ا}$

جو مساوات مفروضہ کا حل ہے۔

ظاہر ہے کہ اس قسم کی مساواتوں کو خطی (یا کسی اور معلومہ) صورت میں لانے کے لئے بڑی فراست اور تیز فہمی کی ضرورت ہوگی۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو تکمل کرو

۱- $(۱+\text{لا}^{۲})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = \text{و}^{\text{مس}^{-۱}\text{لا}}$ ۲- $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{اما} = \text{جب ب لا}$

۳- $\frac{\text{فرل}}{\text{فرط}} + \frac{\text{ل}}{\text{ط}} = \text{ا ط}^{\text{ن}}$ ۴- $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} + \frac{\text{لا}}{\text{ما}} = \text{ما}^{۲}$

۵- $(۱+\text{ما}^{۲}) + (\text{لا} - \text{و}^{\text{مس}^{-۱}\text{ما}})\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$ ۶- $\left(\frac{\text{و}^{-۲\sqrt{\text{لا}}}}{\sqrt{\text{لا}}} - \frac{\text{ما}}{\sqrt{\text{لا}}}\right)\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = ۱$

۷۔ ثابت کرو کہ دفعہ ۷ کے حل میں کوئی زیادہ عمومیت پیدا نہیں ہوتی اگر متکمل جزوِ ضربی $و^{\int ف\, فرلا}$ کے حاصل کرنے میں قوت نما کے ساتھ ایک مستقل کا اضافہ کر دیا جائے۔

۸۔ ایسے منحنی معلوم کرو جن میں کارٹیزی زیر عماد ایسے بدلے جیسے سمتی نیم قطر کا مربع۔

ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو

۹۔ $\frac{فرما}{فرلا} + \frac{ما}{لا} = \frac{ما^{۲}}{لا^{۲}}$ ۱۰۔ $\frac{فرما}{فرلا} + \frac{ما}{لا} = \frac{ما^{۳}}{لا^{ن}}$

۱۱۔ $\frac{فرما}{فرلا} + لا\, ما = لا\, ما^{ن}$

۱۲۔ $\frac{فرما}{فرلا} + \frac{۱}{لا} مس\, ما = \frac{۱}{لا^{۲}} مس\, ما\, جب\, ما$ [رکھو $ما = جب^{-۱} ی$]

۱۳۔ $\frac{فری}{فرلا} + \frac{ی}{لا} لوک\, ی = \frac{ی}{لا^{۲}} (لوک\, ی)^{۲}$ [رکھو $ی = و^{ما}$]

۱۴۔ $\frac{فری}{فرلا} + لا = و^{(ن-۱)ی}$ [رکھو $ی = لوک\, ما$]

۱۵۔ ایسے منحنی معلوم کرو جن کے سمتی نیم قطر اور قطبی زیر مماس کے متکافیوں کا مجموعہ مستقل ہو۔

۱۶۔ ایسے منحنیات کے قبیل کی قطبی مساوات معلوم کرو جن میں سمتی نیم قطر اور قطبی زیر عماد کا مجموعہ ایسے بدلے جیسے سمتی نیم قطر کی ن ویں قوت۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ ایسے منحنی جن میں انحناء کا نیم قطر ایسے بدلتا ہو جیسے عماد پر کے عمود کا مربع ایک ایسی جماعت سے تعلق رکھتے ہیں جس کی پائیں مساوات $ر^{۲} - ع^{۲} = \frac{ع}{ک} + \frac{۱}{۲ک} + ا\, و^{۲ک\, ع}$

ہے جہاں ک ایک معلومہ اور ا اختیاری مستقل ہے۔

۱۸۔ ذیل کی مساواتوں کو تکمیل کرو

(۱) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{۱}{\text{لا}} = \frac{\text{و}^{\text{ما}}}{\text{لا}^۲}$ (۲) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ا} = \text{و}^{-\text{ما}}\ \text{جب ب لا}$

(۳) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{مس ما}}{۱ + \text{لا}} = (۱ + \text{لا})\ \text{و}^{\text{لا}}\ \text{قط ما}$

(۴) $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - \frac{\text{ف (ما)}}{\text{فَ (ما)}}\ \text{فہَ (لا)} = \frac{\text{فہ (لا) فہَ (لا)}}{\text{فَ (ما)}}$

باب دوم

پہلے رتبہ کی مساواتیں (مسلسل)

متجانس مساواتیں ۔ ایک حرف غائب

کلیروی صورت

۹۔ صورت سوم ۔ متجانس مساواتیں ۔

جو مساواتیں لا، ما میں متجانس ہوں وہ اس طرح لکھی جا سکتی ہیں

$$\text{لا}^{\text{ن}}\ \text{ف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\ ،\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right) = ۰$$

(۱) اگر ممکن ہو تو اس صورت میں ہم مساوات کو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کے لئے حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں، اس طرح اس شکل کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{فہ}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)$$

اس میں رکھو $\text{ما} = \text{و لا}$

تو حاصل ہوگا $\text{و} + \text{لا}\ \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = \text{فہ}(\text{و})$

یا $$\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \frac{\text{فرو}}{\text{فہ}(\text{و}) - \text{و}}$$

اس طرح متغیر الگ ہو جاتے ہیں اور مساوات کا حل صورت اول کی

تحت میں آجاتا ہے۔

$$\text{پس}\quad \text{لوک ر لا} = \int \frac{\text{فرو}}{\text{فہ (و)} - \text{و}}$$

(ب) لیکن اگر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو مساوات کو $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ کے لئے حل کرنا چاہئے، اس طرح $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کے لئے ع رکھنے سے

$$\text{ما} = \text{لا فہ (ع)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۱)$$

بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے

$$\text{ع} = \text{فہ (ع)} + \text{لا فہَ (ع)} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

$$\text{یا}\quad \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = \frac{\text{فہَ (ع) فرع}}{\text{ع} - \text{فہ (ع)}}$$

اس مساوات کو تکمیل کرنے سے ہم لا کو ع کے تفاعل اور ایک اختیاری مستقل کی رقوم میں بیان کرسکتے ہیں

$$\text{یعنے}\quad \text{ر لا} = \text{ف (ع)} \quad \text{فرض کرو} \ldots\ldots \quad (۲)$$

ع کو ان مساواتوں (۱) اور (۲) سے ساقط کرنے سے حل مطلوب حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ $(\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{لا ما}$

$$\text{یہاں}\quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا ما}}{\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}}$$

اور ما = و لا رکھنے سے

$$\text{لا} \frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} + \text{و} = \frac{\text{و}}{۱ + \text{و}^{۲}}$$

یا لا (فرو / فرلا) = − و³ / (و² + ۱)

∴ فرلا / لا = − (۱ / و³ + ۱ / و) فرو

یا لوک ا ر لا = ۱ / ۲و² − لوک و

یا ا ر ما = و^(لا² / ۲ما²)

مثال ۲ — فرض کرو کہ مساوات یہ ہے

ما / لا = فرما / فرلا + (فرما / فرلا)²

یعنی ما = لا (ع + ع²)

تب ع = (ع + ع²) + لا (۱ + ۲ع) فرع / فرلا

یا فرلا / لا + (۱ / ع² + ۲ / ع) فرع = ۰

جس سے حاصل ہوتا ہے لوک ا ر لا + ۲ لوک ع − ۱ / ع = ۰

یعنی ا ر لا ع² = و^(۱/ع)

اور
{ ما / لا = ع + ع²
{ ا ر لا ع² = و^(۱/ع)

کا ع، حاصل اسقاط حل مطلوب ہے۔

یہ حاصل اسقاط ہے لوک { ار لا / ۴ (−۱ ± √((۴ما + لا) / لا))² } = لا / ۲ما { ۱ ± √((۴ما + لا) / لا) }

لیکن اگر جبر یہ طریق پر ع کو ساقط کرنا ممکن نہ ہو یا اگر ساقط کرنے پر ایک بے ڈھنگا سا نتیجہ حاصل ہو تو عام طور پر ع والی ان مساواتو

کو بغیر بدلے اسی شکل میں چھوڑ دیتے ہیں، اور انہیں ایسی ہمزاد مساواتیں خیال کرتے ہیں جن کا ع، حاصل استقاط تفرقی مساوات کا حل مطلوب ہے

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

۱۔ $\frac{\text{و ما}}{\text{و لا}} = \frac{\text{لا}}{\text{لا} + \text{ما}}$

۲۔ $(\text{۳ لا} + \text{۴ ما}) = (\text{۵ لا} + \text{۶ ما}) \frac{\text{و ما}}{\text{و لا}}$

۳۔ $\text{لا}^{2} \frac{\text{و ما}}{\text{و لا}} = \text{ما}^{2}$

۴۔ $\text{ما} = \text{لا} \left[\frac{\text{و ما}}{\text{و لا}} + \left(\frac{\text{و ما}}{\text{و لا}}\right)^{3} \right]$

۵۔ $\text{ما} = \text{لا} \left\{ \text{ا} \left(\frac{\text{و ما}}{\text{و لا}}\right)^{2} + \text{ب} \frac{\text{و ما}}{\text{و لا}} + \text{ج} \right\}$

۱۰ ۔ خاص صورت

مساوات $\frac{\text{و ما}}{\text{و لا}} = \frac{\text{ا لا} + \text{ب ما} + \text{ج}}{\text{اَ لا} + \text{بَ ما} + \text{جَ}}$ بآسانی متجانس شکل میں اس طرح لائی جاسکتی ہے

اس میں رکھو $\left.\begin{array}{l} \text{لا} = \text{ضاَ} + \text{ھ} \\ \text{ما} = \text{عاَ} + \text{ک} \end{array}\right\}$ جہاں ضاَ، عاَ متغیر ہیں اور ھ، ک مستقل۔

تب $\frac{\text{و عا}}{\text{و ضا}} = \frac{\text{ا ضا} + \text{ب عا} + (\text{ا ھ} + \text{ب ک} + \text{ج})}{\text{اَ ضا} + \text{بَ عا} + (\text{اَ ھ} + \text{بَ ک} + \text{جَ})}$

اب ھ، ک کی قیمتیں ایسی منتخب کرو کہ

$$\text{ا ھ} + \text{ب ک} + \text{ج} = ۰$$
$$\text{اَ ھ} + \text{بَ ک} + \text{جَ} = ۰$$

پس $\frac{\text{ھ}}{\text{ب جَ} - \text{بَ ج}} = \frac{\text{ک}}{\text{ج اَ} - \text{جَ ا}} = \frac{۱}{\text{ا بَ} - \text{اَ ب}}$

$$\text{تب}\quad \frac{\text{فرعا}}{\text{فرضا}} = \frac{\text{ا ضا} + \text{ب عا}}{\text{اَ ضا} + \text{بَ عا}}$$

یہ مساوات متجانس ہے، اس میں ہم رکھ سکتے ہیں عا = و ضا اور تغیر حسب سابق الگ ہو سکتے ہیں۔

۱۱- لیکن ایک صورت میں ھ، ک اس طرح منتخب نہیں ہو سکتے

$$\text{یعنی جبکہ}\quad \frac{\text{ا}}{\text{اَ}} = \frac{\text{ب}}{\text{بَ}} \neq \frac{\text{ج}}{\text{جَ}}$$

$$\text{اس صورت میں فرض کروکہ}\quad \frac{\text{اَ}}{\text{ا}} = \text{م} \quad \text{اور} \quad \text{الا} + \text{ب ما} = \text{عا}$$

$$\text{تب}\quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{ب}}\left(\frac{\text{فرعا}}{\text{فرلا}} - \text{ا}\right)$$

$$\text{پس}\quad \left(\frac{\text{فرعا}}{\text{فرلا}} - \text{ا}\right) = \text{ب}\,\frac{\text{عا} + \text{ج}}{\text{م عا} + \text{جَ}}$$

$$\text{یا}\quad \frac{\text{فرعا}}{\text{فرلا}} = \frac{(\text{ام} + \text{ب})\,\text{عا} + \text{ا جَ} + \text{ب ج}}{\text{م عا} + \text{جَ}}$$

$$\text{اور}\quad \text{فرلا} = \frac{\text{م عا} + \text{جَ}}{(\text{ام} + \text{ب})\,\text{عا} + \text{ا جَ} + \text{ب ج}}\ \text{فرعا}$$

تغیر اب الگ ہو سکتے ہیں اور مساوات کا تکمل عمل میں آ سکتا ہے۔

۱۲- ایک اور صورت قابل توجہ ہے یعنی

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{الا} + \text{ب ما} + \text{ج}}{-\text{ب لا} + \text{بَ ما} + \text{جَ}}$$

جہاں شمار کنندہ میں ما کا سر نسب نما میں لا کے سر کے مساوی اور مختلف العلامت ہے۔

اس صورت میں مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$(\text{الا} + \text{ج})\ \text{فرلا} + \text{ب}\,(\text{ما فرلا} + \text{لا فرما}) = (\text{بَ ما} + \text{جَ})\ \text{فرما}$$

جو ایک "ٹھیک یا حاضر" تفرقی مساوات ہے، اس کا تکملہ ہے

ا لا^۲ + ۲ ج لا + ۲ ب لا ما = بَ ما^۲ + ۲ جَ ما + م

جہاں م اختیاری مستقل ہے۔

مثال ۱۔ تکمل کرو $\frac{\text{د ما}}{\text{د لا}} = \frac{\text{۲ لا + ۳ ما − ۸}}{\text{لا + ما − ۳}}$ کو۔

رکھو لا = ضا + ھ، ما = عا + ک

پس $\frac{\text{د عا}}{\text{د ضا}} = \frac{\text{۲ ضا + ۳ عا + (۲ ھ + ۳ ک − ۸)}}{\text{ضا + عا + (ھ + ک − ۳)}}$

ھ اور ک کی قیمتیں ایسی منتخب کرو کہ

$\left.\begin{array}{l}\text{۲ ھ + ۳ ک − ۸ = ۰}\\ \text{ھ + ک − ۳ = ۰}\end{array}\right\}$ یعنی ھ = ۱، ک = ۲

تب $\frac{\text{د عا}}{\text{د ضا}} = \frac{\text{۲ ضا + ۳ عا}}{\text{ضا + عا}}$

اب رکھو عا = و ضا، تب

$\text{و + ضا}\,\frac{\text{د و}}{\text{د ضا}} = \frac{\text{۲ + ۳ و}}{\text{۱ + و}}$

$\therefore\ \text{ضا}\,\frac{\text{د و}}{\text{د ضا}} = \frac{\text{۲ + ۳ و}}{\text{۱ + و}} - \text{و} = -\,\frac{\text{و}^۲ - \text{۲ و} - ۲}{\text{و + ۱}}$

$\therefore\ \frac{\text{د ضا}}{\text{ضا}} = -\,\frac{\text{و + ۱}}{\text{(و − ۱)}^۲ - ۳}\ \text{د و}$

$= -\left[\frac{\text{و − ۱}}{\text{(و − ۱)}^۲ - ۳} + \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\left(\frac{۱}{\text{و − ۱ − }\sqrt{۳}} - \frac{۱}{\text{و − ۱ + }\sqrt{۳}}\right)\right]\text{د و}$

$\therefore\ -\text{لوک ضا} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\left\{\text{(و − ۱)}^۲ - ۳\right\} + \frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{و − ۱ − }\sqrt{۳}}{\text{و − ۱ + }\sqrt{۳}} + \text{م}$

جہاں ضا = لا − ۱ اور $\text{و} = \frac{\text{ما − ۲}}{\text{لا − ۱}}$

مثال ۲۔ تکمل کرو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا} + \text{ما} - ۱}$ کو

فرض کرو کہ $\text{لا} + \text{ما} = \text{ی}$، تب

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = ۱ + \frac{\text{ی}}{\text{ی} - ۱} = \frac{۲\text{ی} - ۱}{\text{ی} - ۱}$$

اور $\text{فرلا} = \frac{\text{ی} - ۱}{۲\text{ی} - ۱}\,\text{فری} = \frac{۱}{۲}\left[۱ - \frac{۱}{۲\text{ی} - ۱}\right]\text{فری}$

$\therefore\ \text{لا} = \frac{۱}{۲}\,\text{ی} - \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\,(۲\text{ی} - ۱) + \text{ا}$

جہاں $\text{ی} = \text{لا} + \text{ما}$

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو تکمل کرو۔

۱۔ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۲\text{لا} + ۳\text{ما}}{۳\text{لا} + ۲\text{ما}}$

۲۔ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا} + ۲\text{ما} - ۳}{۲\text{لا} + \text{ما} - ۳}$

۳۔ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۲\text{لا} + \text{ما} - ۲}{۳\text{لا} + \text{ما} - ۳}$

۴۔ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ما} - \text{ا}}{\text{ب}\,\text{لا} + \text{ا}\,\text{ما} - \text{ب}}$

۵۔ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا} + \text{ما} + ۱}{\text{لا} + \text{ما} - ۱}$

۶۔ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا} + \text{ما} + ۱}{۲\text{لا} + ۲\text{ما} + ۱}$

۷۔ $(۲\text{لا} + ۳\text{ما} - ۵)\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۳\text{لا} + ۲\text{ما} - ۵ = ۰$

۸۔ $(۲\text{لا} + ۳\text{ما} - ۵)\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۲\text{لا} + ۳\text{ما} - ۱ = ۰$

۹۔ ثابت کرو کہ ایک ذرہ لا، ما جو اس طرح حرکت کرتا ہے کہ

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} = \text{ا}\,\text{لا} + \text{ھ}\,\text{ما} + \text{گ}$$

$$\frac{د لا}{د ت} = -(ھ لا + ب ما + ف)$$

ہمیشہ ایک مخروطی تراش پر واقع ہوتا ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ عام متجانس مساوات $ف\left(\frac{ما}{لا}، \frac{د ما}{د لا}\right) = ۰$
کے حل ہمیشہ متشابہ منحنیات کے قبیل کو تعبیر کرتے ہیں۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ $ف\left(\frac{ما}{لا}، \frac{د ما}{د لا}\right) = ۰$ کے حل لا، ما اور ایک مستقل کی کسی خاص قوت میں متجانس ہیں۔ برعکس اس کے اگر ایک قبیل منحنیات کے کسی رکن کی نمونہ کی مساوات لا، ما اور ایک مستقل کی کسی خاص قوت کے لحاظ سے متجانس ہو تو اس قبیل کی تفرقی مساوات بھی متجانس ہوگی اور قبیل کے منحنی سب ایک دوسرے کے متشابہ ہوں گے۔

۱۲۔ بتاؤ کہ ا، ب کی مختلف قیمتوں کے لئے منحنیات کے قبائل ذیل میں سے کون کون سے متشابہ جتھوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

(۱) $ما^۲ = ۴ ا لا$ (۲) $ما = ا جمز \frac{لا}{ا}$

(۳) $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲} = ۱$ (۴) $ما = ۲ ا^۳ لوک \frac{لا}{ا^۳}$

(۵) $ب سس^{ا} \frac{ما}{لا} = ا + ما$ (۶) $لا^۳ + ما^۳ = ۳ ا لا ما$

۱۳۔ صورت چہارم۔ ایک حرف غائب

لا غائب

(۱) فرض کرو کہ تفرقی مساوات میں لا موجود نہیں ہے، اس صورت

ہیں مساوات کی شکل یہ ہوگی

$$ف\left(ما، \frac{فرما}{فرلا}\right) = ۰$$

اسے ہم $\frac{فرما}{فرلا}$ یا ما کے لئے جیسا مناسب ہو حل کر سکتے ہیں۔

(۱) اگر $\frac{فرما}{فرلا}$ کے لئے حل کیا جائے تو مساوات کی صورت یہ ہوگی

$$\frac{فرما}{فرلا} = فہ\ (ما)$$

تب $فرلا = \frac{فرما}{فہ(ما)}$

اور تکملی ہے $لا = \int \frac{فرما}{فہ(ما)} + ا$

(۲) اگر $\frac{فرما}{فرلا}$ کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو ہم ما کے لئے حل کر سکتے ہیں، ایسا کرنے سے حاصل ہوگا $ما = فہ(ع)$ جہاں ع تفرقی سر $\frac{فرما}{فرلا}$ کی بجائے لکھا گیا ہے۔

بلحاظ لا کے جو مساوات میں موجود نہیں تفرق کرنے سے

$$ع = فہَ\ (ع)\ \frac{فرع}{فرلا}$$

یعنی $فرلا = \frac{فہَ(ع)}{ع}\ فرع$

پس $لا = \int \frac{فہَ(ع)}{ع}\ فرع + ا$

تکمل کا عمل پورا کرنے پر ہم ع کو اس مساوات اور ما = فہ (ع) سے ساقط کرتے ہیں، اسطرح مساوات مفروضہ کا حل حاصل ہوتا ہے۔

۱۴۔ ما غائب

(ب) فرض کرو کہ تفرقی مساوات میں ما موجود نہیں ہے، اس صورت میں اس کی شکل ہوگی

$$ف\left(لا ، \frac{د ما}{د لا}\right) = ۰$$

چونکہ $\frac{د ما}{د لا} = \frac{۱}{\frac{د لا}{د ما}}$، اسلئے اوپر کی مساوات اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہے

$$سا\left(لا ، \frac{د لا}{د ما}\right) = ۰$$

پس اگر ما کو متغیر متبوع مانا جائے تو دفعہ ماقبل کی تشریح کا اطلاق اس پر بھی ہوتا ہے اور وہ اس طرح۔

(۱) بشرط سہولت $\frac{د لا}{د ما}$ کے لئے حل کرنے سے اس طرح کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\frac{د لا}{د ما} = فہ (لا)$$

تب

$$د ما = \frac{د لا}{فہ (لا)}$$

اور تکملی ہے

$$ما = \int \frac{د لا}{فہ (لا)} + ر$$

(۲) لیکن اگر $\frac{د لا}{د ما}$ کے لئے حل کرنا تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو

لا کے لئے حل کرنے سے ہم اس طرح کا نتیجہ حاصل کرتے ہیں لا= فہ(ق) جہاں ق، $\frac{\text{ڈلا}}{\text{ڈما}}$ کے لئے لکھا گیا ہے۔ بلحاظ ما کے جو مساوات میں موجود نہیں ہے تفرق کرنے سے

$$\text{ق} = \text{فہَ}(\text{ق}) \frac{\text{ڈق}}{\text{ڈما}}$$

اس طرح $\text{ڈما} = \frac{\text{فہَ}(\text{ق})}{\text{ق}} \text{ڈق}$

اور $\text{ما} = \int \frac{\text{فہَ}(\text{ق})}{\text{ق}} \text{ڈق} + \text{ا}$

تکمل کا عمل پورا کرنے پر ہمیں ق کو اس مساوات اور لا= فہ(ق) سے ساقط کرنا چاہیئے، اس طرح تفرقی مساوات کا حل مطلوب حاصل ہوگا۔

طالب علم دیکھے کہ دونوں صورتوں میں خواہ لا موجود نہ ہو یا ما، ہم حتی الامکان سب سے پہلے $\frac{\text{ڈما}}{\text{ڈلا}}$ کے لئے حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں، لیکن اگر یہ عمل تکلیف دہ یا ناممکن ہو تو باقی ماندہ حرف کے لئے حل کرنے کے بعد ہم اُس حرف کے لحاظ سے جو مساوات میں موجود نہ ہو تفرق کرتے ہیں، پس ہر صورت میں جو حرف مساوات میں موجود نہیں ہوتا اُسے متغیر ممنوع خیال کیا جاتا ہے۔

مثال ۱۔ مساوات $\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}} - \text{لا} \frac{\text{ڈما}}{\text{ڈلا}} = \text{۰}$ کو تکمل کرو

اسجگہ $\frac{\text{ڈلا}}{\text{ڈما}} = \frac{\text{لا}}{\text{۱} + \text{لا}^{\text{۲}}}$ یعنی $\text{ڈما} = (\text{لا} + \frac{\text{۱}}{\text{لا}}) \text{ڈلا}$

اور $\text{ما} = \frac{\text{لا}^{2}}{2} + \text{لوک لا} + \text{ا}$ حل مطلوب ہے

مثال ۲ — حل کرو $\text{لا} \frac{\text{ور ما}}{\text{ور لا}} = 1 + \left(\frac{\text{ور ما}}{\text{ور لا}}\right)^{2}$ کو۔

مساوات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$\text{لا} = \text{ق} + \frac{1}{\text{ق}} \quad \text{جہاں} \quad \text{ق} = \frac{\text{ور لا}}{\text{ور ما}}$$

یہاں مساوات میں ما موجود نہیں ہے۔ اس کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

$$\text{ق} = \left(1 - \frac{1}{\text{ق}^{2}}\right) \frac{\text{ور ق}}{\text{ور ما}}$$

$$\text{یا} \quad \frac{\text{ور ما}}{\text{ور ق}} = \frac{1}{\text{ق}} - \frac{1}{\text{ق}^{3}}$$

$$\text{اور} \quad \text{ما} = \text{لوک ق} + \frac{1}{2\text{ق}^{2}} + \text{ا}$$

اس مساوات اور مساوات $\text{لا} = \text{ق} + \frac{1}{\text{ق}}$ کا ق کا حاصل اسقاط حل مطلوب ہے۔

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

۱۔ $\frac{\text{ور ما}}{\text{ور لا}} = \text{ما} + \frac{1}{\text{ما}}$　　۲۔ $\frac{\text{ور ما}}{\text{ور لا}} = \text{لا} + \frac{1}{\text{لا}}$

۳۔ $\sqrt{\text{ا} + \text{لا}}\ \frac{\text{ور ما}}{\text{ور لا}} + \text{لا} = 0$

۴۔ $(2\text{ا لا} + \text{لا}^{2}) \frac{\text{ور ما}}{\text{ور لا}} = \text{ا}^{2} + 2\text{ا لا}$

۵۔ $(\text{۲ ا ما} + \text{ما}^{2})\,\frac{\text{و ما}}{\text{و لا}} = \text{ا}^{2} + \text{۲ ا ما}$

۶۔ $\text{ما} = \text{جب}\left(\frac{\text{و ما}}{\text{و لا}}\right) - \frac{\text{و ما}}{\text{و لا}}\ \text{جم}\left(\frac{\text{و ما}}{\text{و لا}}\right)$

۷۔ $\text{ما} = \text{ا}\left(\frac{\text{و ما}}{\text{و لا}}\right)^{3} + \text{ب}\left(\frac{\text{و ما}}{\text{و لا}}\right)^{2}$

۸۔ $\text{لا}\left(\frac{\text{و ما}}{\text{و لا}}\right)^{3} = \text{ا} + \text{ب}\,\frac{\text{و ما}}{\text{و لا}}$

۱۵۔ صورت پنجم۔ کلیروی صورت $\text{ما} = \text{لا}\,\frac{\text{و ما}}{\text{و لا}} + \text{ف}\left(\frac{\text{و ما}}{\text{و لا}}\right)$

$\frac{\text{و ما}}{\text{و لا}}$ کے لئے ع لکھنے سے

$\text{ما} = \text{ع لا} + \text{ف}(\text{ع}) \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$

بلحاظ لا کے تفرق کرنے سے

$\text{ع} = \text{ع} + \text{لا}\,\frac{\text{و ع}}{\text{و لا}} + \text{فَ}(\text{ع})\,\frac{\text{و ع}}{\text{و لا}}$

یا $\left\{\text{لا} + \text{فَ}(\text{ع})\right\}\frac{\text{و ع}}{\text{و لا}} = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$

جس سے $\frac{\text{و ع}}{\text{و لا}} = ۰$ یا $\text{لا} + \text{فَ}(\text{ع}) = ۰$

اب $\frac{\text{و ع}}{\text{و لا}} = ۰$ سے حاصل ہوتا ہے ع = ج جہاں ج مستقل ہے

پس ما = ج لا + ف (ج) تفرقی مساوات کا ایک حل ہے جہاں ج مستقل ہے۔

نیز اگر ع کو مساوات

لا + فَ (ع) = ۰ .... (۳)

سے لا کی رقوم میں معلوم کیا جائے تو ع ، لا کا ایک تفاعل ہوگا اور اگر ع کی یہ قیمت مساوات (۱) میں مندرج کی جائے اور جو ایک ہی بات ہے کہ ع کو مساواتوں (۱)، اور (۳) سے ساقط کیا جائے تو ہمیں لا، ما میں ایک ربط حاصل ہوگا اور یہ بھی تفرقی مساوات کو پورا کرے گا۔

اب ع کو مساواتوں

ما = ع لا + ف (ع)

۰ = لا + فَ (ع)

سے ساقط کرنا وہی بات ہے کہ ج کو مساواتوں

ما = ج لا + ف (ج)

۰ = لا + فَ (ج)

سے ساقط کیا جائے یعنی ج کی مختلف قیمتوں کے لئے خط ما = ج لا + ف (ج) کا لفاف معلوم کیا جائے۔

اس لئے مساوات مفروضہ کے حل دو طرح کے ہیں۔

(۱) خطی حل جسے "مکمل ابتدائی" کہتے ہیں اور جس میں ایک اختیاری مستقل شامل ہوتا ہے۔

(۲) لفاف یا "نادر حل" جس میں کوئی اختیاری مستقل شامل نہیں ہوتا اور نیز یہ حل مکمل ابتدائی سے اختیاری مستقل کی جگہ کوئی خاص عددی قیمت مندرج کرنے سے حاصل نہیں ہو سکتا۔

ان حلوں کے درمیان ہندسی ربط یہ ہے کہ کامل ابتدائی خطوط کے ایک قبیل کو تعبیر کرتا ہے اور نادر حل ان کے لفاف کو۔ نادر حلوں کی بحث اس کتاب کی حدود سے باہر ہے اور مزید معلومات کے لئے طالب علم بڑے رسالوں کا مطالعہ کرے۔

مثال - حل کرو ما = ع لا + ا/ع

کلیروی قاعدہ کی رو سے کامل ابتدائی ہے

ما = م لا + ا/م

لفافی یا نادر حل اوپر کی مساوات اور

۰ = لا - ا/م^۲

کے درمیان م کو ساقط کرنے سے حاصل ہوگا۔

نادر حل ہے ما^۲ = ۴ ا لا

طالب علم فوراً پہچان لیگا کہ نادر حل ما^۲ = ۴ ا لا مکافی کی مساوات ہے اور کامل ابتدائی ما = م لا + ا/م مکافی کے مماس کی مساوات ہے -

امثلہ

ذیل کی ہر ایک صورت میں کامل ابتدائی اور لفافی حل معلوم کرو

۱- ما = ع لا + ع^۲ ۲- ما = ع لا + ع^۳

۳- ما = ع لا + ع^ن ۴- ما = ع لا + √(ا^۲ ع^۲ + ب^۲)

۵- ما = (لا - ا) ع - ع^۲ ۶- (ما - ع لا)(ع - ۱) = ع

۷- مساوات ما = لا ف(ع) + سا(ع) .... (۱)

بھی پہلے بلحاظ لا کے تفرق کرنے پھر ع کو متغیر متبوع خیال کرنے سے حل ہو سکتی ہے -

تفرق کرنے سے

ع = فہ (ع) + لا فہَ (ع) ورع/ورلا + سَا (ع) ورع/ورلا

جس سے ورلا/ورع + لا فہَ (ع)/(فہ (ع) - ع) = - سَا (ع)/(فہ (ع) - ع)

جو ایک خطی مساوات ہے اور اس کا حل یہ ہے

لا و^(∫ فہَ (ع) ورع/(فہ (ع) - ع)) = - ∫ سَا (ع)/(فہ (ع) - ع) و^(∫ فہَ (ع) ورع/(فہ (ع) - ع)) ورع + ا ..... (۲)

اب اگر مساواتوں (۱) اور (۲) سے ع کو ساقط کیا جائے تو اصلی مساوات کا کامل ابتدائی حاصل ہوگا۔

مثال۔ حل کرو ما = ۲ ع لا + ع^۲ ..... (۱)

تفرق کرنے سے ع = ۲ ع + ۲ لا ورع/ورلا + ۲ ع ورع/ورلا

یا ع ورلا/ورع + ۲ لا = - ۲ ع

یعنی ور/ورع (ع^۲ لا) = - ۲ ع^۲

جس سے حاصل ہوتا ہے ع^۲ لا = - ۲/۳ ع^۳ - ا ..... (۲)

ان مساواتوں کا ع، حاصل اسقاط اس طرح حاصل ہو سکتا ہے۔ پہلے ع کے لئے مساوات (۱) کو حل کرو پھر (۲) میں مندرج کرو۔ لیکن اگر نتیجہ کو منطق صورت میں پیش کرنا مطلوب ہو تو اس طرح عمل کرو

مساوات (۲) سے ۲ ع^۳ + ۳ ع^۲ لا + ۳ ا = ۰

(۱) سے ع^۳ + ۲ ع^۲ لا - ع ما = ۰

اس لئے ع^۲ لا - ۲ ع ما - ۳ ا = ۰

اس مساوات اور ع^۲ + ۲ ع لا - ما = ۰ سے چلیپی ضرب کے

ذریعہ

$$\frac{\text{ع}^2}{2\,\text{ما}^2 + 6\,\text{ا}\,\text{لا}} = \frac{\text{ع}}{\text{لا}\,\text{ما} - 3\,\text{ا}} = \frac{1}{2\,\text{لا}^2 + 2\,\text{ما}}$$

جس سے حاصل اسقاط ہے $4(\text{ما}^2 + 3\,\text{ا}\,\text{لا})(\text{لا}^2 + \text{ما}) = (\text{لا}\,\text{ما} - 3\,\text{ا})^2$

۱۷- ع کو ساقط کرنے کا جبریہ عمل کئی صورتوں میں مشکل یا ناممکن ہوتا ہے، ایسی صورتوں میں اسقاط کا عمل فی الحقیقت نہیں کیا جاتا لیکن مساواتوں (۱) اور (۲) کو ایسی ہمزاد مساواتیں خیال کیا جاتا ہے جن کا ع، حاصل اسقاط مساوات زیربحث کا حل مطلوب ہوتا ہے

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو

۱- $\text{ما} = \text{ع}^2\,\text{لا} + \text{ع}$ ۲- $\text{ما} = \text{ا}\,\text{لا}\,\text{ع} + \text{ع}^2$

۳- $\text{ا} = \text{ع}^2\,\text{لا} + \text{ع}^3$ ۴- $\text{ما} = (\text{ع} + \text{ع}^2)\,\text{لا} + \frac{1}{\text{ع}}$

۵- $\text{ما} = (\text{ع} + \text{ع}^{\text{ن}})\,\text{لا} + \frac{1}{\text{ع}^{\text{ن}-1}}$ ۶- $\text{ا} = 2\,\text{ع}\,\text{لا} + \text{ع}^{\text{ن}}$

۷- $\text{ما} = \text{ا}\,\text{ع}\,\text{لا} + \text{ب}\,\text{ع}^3$

۸- ایک منحنی کے نقطہ ن پر کا مماس محور و ما سے ت پر ملتا ہے اور و ت² اُس زاویۂ میلان کے مماس کے متناسب ہے جو ن ت کا و لا کے ساتھ ہے، منحنی کو معلوم کرو۔ [آکسفورڈ ۱۸۸۸ء]

۹- جو منحنی یہ خاصیت رکھتے ہیں کہ حوالہ کے محوروں پر اُن کے مماسوں کے مقطوعوں کا مجموعہ مستقل ہوتا ہے اُن کی تفرقی مساوات معلوم کرو۔

کامل ابتدائی معلوم کرنے سے مماس کی مساوات اور نادر حل سے منحنیات زیربحث کی مساوات معلوم کرو۔

۱۰۔ وہ منحنی معلوم کرو جن کی صورت میں اُس مثلث کا رقبہ جو مماس اور حوالہ کے محوروں کے درمیان بنتا ہے مستقل ہو۔

۱۱۔ جن منحنیات میں مماس کے اُس حصہ کا طول جو حوالہ کے محوروں کے درمیان کٹتا ہے مستقل ہو اُن کی تفرقی مساوات معلوم کرو، کامل ابتدائی اور نادر حل کو حاصل کرو اور ہر ایک کی ہندسی تعبیر بتاؤ۔

۱۲۔ ایک منحنی تفرقی مساوات $\text{ما} = \text{ع}^{۲}(\text{لا} - \text{ع})$ کو پورا کرتا ہے، نیز اگر $\text{لا} = \frac{۱}{۲}$ تو $\text{ع} = ۰$۔ ما منحنی کی مساوات معلوم کرو [آکسفورڈ ۱۸۰۹ء]

۱۳۔ مساوات ذیل کا کامل ابتدائی اور نادر حل معلوم کرو

$$\text{و}^{۳\text{لا}}\left(\text{ما} - \frac{\text{ور ما}}{\text{ور لا}}\right) = \text{ج}_{۱}\left\{\text{و}^{۲\text{لا}} + \left(\frac{\text{ور ما}}{\text{ور لا}}\right)^{۲}\right\}^{\frac{۳}{۲}}$$ [آکسفورڈ ۱۸۹۰ء]

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر $\text{لا}^{۲} = \text{س}$ اور $\text{ما}^{۲} = \text{ت}$ تو مساوات ذیل

$$\text{ا لا ما ما}_{۱}^{۲} + (\text{لا}^{۲} - \text{ا ما}^{۲} - \text{ب})\,\text{ما}_{۱} - \text{لا ما} = ۰$$

کلیروی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے۔

اس طرح سے اس کا کامل ابتدائی اور نادر حل معلوم کرو۔ نتیجہ کی تعبیر بیان کرو۔

باب سوم

دوسرے رتبہ کی تفرقی مساواتیں

ٹھیک یا حاضر تفرقی مساواتیں

۱۸ — دوسرے رتبہ کی مساوات

اب ہم دوسرے رتبہ کی تفرقی مساوات پر بحث کرینگے

$$\text{فہ}\,(\text{لا}،\ \text{ما}،\ \text{ما}_1،\ \text{ما}_2) = 0$$

اِس کے حل کرنے کا کوئی **عام** طریقہ نہیں ہے، مگر اس کی خاص صورتوں کا حل کرنا چنداں مشکل نہیں۔

۱۹ — صورت اول فرض کرو کہ یہ خطی مساوات ہے

اسکی نمونہ کی صورت ہوگی $\frac{\text{د}^2\,\text{ما}}{\text{د}\,\text{لا}^2} + \text{ف}\,\frac{\text{د}\,\text{ما}}{\text{د}\,\text{لا}} + \text{ق}\,\text{ما} = \text{ر}$

جہاں ف، ق، ر متغیر لا کے تفاعل ہیں۔

اس مساوات کو حل کرنے کی تدبیر یہ ہے کہ پہلے ر کو حذف کرکے مساوات

$$\frac{\text{د}^2\,\text{ما}}{\text{د}\,\text{لا}^2} + \text{ف}\,\frac{\text{د}\,\text{ما}}{\text{د}\,\text{لا}} + \text{ق}\,\text{ما} = 0$$

کا کوئی حل معلوم کیا جائے یا ویسے ہی بھانپ لیا جائے۔

فرض کرو کہ ما = فہ (لا) اس کا ایک حل ہے، اصلی مساوات میں رکھو

$$\text{ما} = \text{ہی}\ \text{فہ}\,(\text{لا})$$

$$\text{ما}_1 = \text{ہی}_1\ \text{فہ}\,(\text{لا}) + \text{ہی}\ \text{فہ}'\,(\text{لا})$$

$$ما_۲ = ی_۲ فہ (لا) + ۲ ی_۱ فہَ (لا) + ی فہً (لا)$$

ان قیمتوں کو مندرج کرنے سے

$$ی_۲ فہ (لا) + ۲ ی_۱ فہَ (لا) + ی فہً (لا)$$
$$+ ف ی_۱ فہ (لا) + ف ی فہَ (لا)$$
$$+ ق ی فہ (لا) = ر$$

لیکن $فہً (لا) + ف فہَ (لا) + ق فہ (لا) = ۰$ حسب مفروض

اس لئے $ی_۲ + \left\{ \frac{۲ فہَ (لا)}{فہ (لا)} + ف \right\} ی_۱ = \frac{ر}{فہ (لا)}$

جو $ی_۱$ کے لئے خطی مساوات ہے

متکمل جزو ضربی ہے

$$و^{\int \left\{ ف + ۲ \frac{فہَ (لا)}{فہ (لا)} \right\} ءلا} \quad یا \quad [فہ (لا)]^۲ و^{\int ف ءلا}$$

اور پہلا تکملی ہے

$$ی_۱ \{ فہ (لا) \}^۲ و^{\int ف ءلا} = \int ر \{ فہ (لا) \} و^{\int ف ءلا} ءلا + ا$$

جس سے دوسرا تکملی اور اس لئے تفرقی مساوات کا حل حاصل ہو سکتا ہے

مثال— اس مساوات کو حل کرو $\frac{ء^۲ ما}{ءلا^۲} + لا^۳ \frac{ءما}{ءلا} - لا^۲ ما = لا^۳ و^{\frac{لا^۴}{۴}}$

یہاں $ما = لا$ مساوات $\frac{ء^۲ ما}{ءلا^۲} + لا^۳ \frac{ءما}{ءلا} - لا^۲ ما = ۰$ کا ایک حل ہے

اس لئے رکھو $ما = لا ی$

تب $ما_۱ = لا ی_۱ + ی$

اور $ما_۲ = لا ی_۲ + ۲ ی_۱$

اس لئے $لا ی_۲ + ۲ ی_۱ + لا^۳ (لا ی_۱ + ی) - لا^۲ (لا ی) = لا^۳ و^{\frac{لا^۴}{۴}}$

$$\text{ی}_1 + \left(-\frac{۲}{\text{لا}} + \text{لا}^{۳}\right)\text{ی}_1 = \text{لا}^{۲}\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}^{۴}}{۴}}$$

اور مکمل جزو ضربی ہے $\text{و}^{\int\left(-\frac{۲}{\text{لا}} + \text{لا}^{۳}\right)\text{دلا}}$ یا $\text{لا}^{۲}\,\text{و}^{\frac{\text{لا}^{۴}}{۴}}$

پس $\frac{\text{د}}{\text{دلا}}\left(\text{ی}_1\,\text{لا}^{۲}\,\text{و}^{\frac{\text{لا}^{۴}}{۴}}\right) = \text{لا}^{۴}$

اور $\text{ی}_1\,\text{لا}^{۲}\,\text{و}^{\frac{\text{لا}^{۴}}{۴}} = \frac{\text{لا}^{۵}}{۵} + \text{ا}$

یعنی $\text{ی}_1 = \frac{۱}{۵}\,\text{لا}^{۳}\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}^{۴}}{۴}} + \frac{\text{ا}}{\text{لا}^{۲}}\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}^{۴}}{۴}}$

جس سے $\text{ی} = -\frac{۱}{۵}\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}^{۴}}{۴}} + \text{ا}\int\frac{۱}{\text{لا}^{۲}}\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}^{۴}}{۴}}\,\text{دلا} + \text{ب}$

اور حل مطلوب ہے $\text{ما} = -\frac{\text{لا}}{۵}\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}^{۴}}{۴}} + \text{ا}\,\text{لا}\int\frac{۱}{\text{لا}^{۲}}\,\text{و}^{-\frac{\text{لا}^{۴}}{۴}}\,\text{دلا} + \text{ب}\,\text{لا}$

۲ ۔ صورت دوم ۔ ایک حرف غائب

(ا) اگر مساوات میں لا موجود نہ ہو تو فرض کرو کہ $\text{ما}_1 = \text{ع}$

تب $\text{ما}_2 = \frac{\text{دع}}{\text{دلا}} = \text{ع}\,\frac{\text{دع}}{\text{دما}}$

اس طرح مساوات $\text{ف}\,(\text{ما}،\ \text{ما}_1،\ \text{ما}_2) = ۰$ ہو جاتی ہے

$$\text{ف}\left(\text{ما}،\ \text{ع}،\ \text{ع}\,\frac{\text{دع}}{\text{دما}}\right) = ۰$$

اور یہ پہلے رتبہ کی مساوات ہے ۔

(ب) اگر ما موجود نہ ہو تو فرض کرو کہ $\text{ما}_1 = \text{ع}$

تب $\text{ما}_{۲} = \frac{\text{و ع}}{\text{و لا}}$

اور $\text{فہ}(\text{لا}، \text{ما}_{۱}، \text{ما}_{۲}) = ۰$ ہو جاتی ہے

$$\text{فہ}\left(\text{لا}، \text{ع}، \frac{\text{و ع}}{\text{و لا}}\right) = ۰$$

اور یہ پہلے رتبہ کی مساوات ہے۔

مثال ۱۔ مساوات $\text{ما}\,\text{ما}_{۲} + \text{ما}_{۱}^{۲} = ۲\,\text{ما}^{۲}$ کو حل کرو۔

یہاں مساوات میں لا موجود نہیں ہے، پس رکھو $\text{ما}_{۱} = \text{ع}$ اور $\text{ما}_{۲} = \text{ع}\,\frac{\text{و ع}}{\text{و ما}}$

اسطرح $\text{ما}\,\text{ع}\,\frac{\text{و ع}}{\text{و ما}} + \text{ع}^{۲} = ۲\,\text{ما}^{۲}$

یا $\frac{\text{و ع}^{۲}}{\text{و ما}} + \frac{۲}{\text{ما}}\,\text{ع}^{۲} = ۴\,\text{ما}$

تکمل جزو ضربی ہے $\text{ہ}^{\int \frac{۲}{\text{ما}}\,\text{و ما}} = \text{ما}^{۲}$

اس لئے $\frac{\text{و}}{\text{و ما}}\left(\text{ع}^{۲}\,\text{ما}^{۲}\right) = ۴\,\text{ما}^{۳}$

یا $\text{ع}^{۲}\,\text{ما}^{۲} = \text{ما}^{۴} + \text{مستقل} = \text{ما}^{۴} + \text{ا}^{۴}$ (فرض کرو)

اس لئے $\frac{\text{ما}\,\text{و ما}}{\sqrt{\text{ما}^{۴} + \text{ا}^{۴}}} = \text{و لا}$

یا $جبنر^{-۱} \frac{ما^۲}{ر^۲} = ۲لا + ر$

یعنی $ما^۲ = ر^۲ \; جبنر (۲لا + ر)$

مثال ۲ - حل کرو $۱ + ما_۱^۲ = لا \, ما_۲ \, ما$ کو

یہاں مساوات میں ما موجود نہیں ہے، پس رکھو $ما_۱ = ع$

اس طرح $۱ + ع^۲ = لا \, ع \frac{ورع}{ورلا}$

یا $\frac{ورلا}{لا} = \frac{ع \, ورع}{۱ + ع^۲}$

یعنی $لوک \, لا = لوک \sqrt{۱ + ع^۲} + مستقل$

$۱ + ع^۲ = \frac{لا^۲}{ر^۲}$ (فرض کرو)

یا $ر \, ورما = \sqrt{لا^۲ - ر^۲} \; ورلا$

جس سے حاصل ہوتا ہے $ر ما = \frac{لا \sqrt{لا^۲ - ر^۲}}{۲} - \frac{ر^۲}{۲} جمنر^{-۱} \frac{لا}{ر} + ب$

جہاں ر اور ب اختیاری مستقل ہیں -

امثلہ

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو -

۱ - $لا \, ما_۲ = ۱$

۲ - $۱ + ما_۱^۲ = ما \, ما_۲$

۳ - $۱ + ما_۱^۲ = لا^۲ \, ما_۲^۲$

۴ - $۹ \, ما_۲^۲ = ۴ \, ما_۱$

۵ - $ر \, ما_۲ = (۱ + ما_۱^۲)^{\frac{۳}{۲}}$

۶ - $ما_۲ + ما_۱^۲ + ما = ۰$

۷- $ما\, ما_۲ + ما_۱^۲ + لا = ۰$ ۸- $ما_۲ + لا\, ما_۱ - ما = \frac{۱}{لا}\, و^{-\frac{لا^۲}{۲}}$

۹- $ما\, ما_۲ = ما_۱^۳ - ما_۱$ (آکسفورڈ ۱۸۸۹ء)

۱۰- مساوات $(۱-ما^۲)\frac{ف^۲ ما}{ف لا^۲} - ما\left(\frac{ف ما}{ف لا}\right)^۲ = ۲\, ما^۳$ کو حل کرو، معلوم ہے

$\frac{ف ما}{ف لا} = ۰$ جبکہ $ما = ۰$ [آکسفورڈ ۱۸۹۰ء]

۱۱- یہ معلوم ہے کہ $لا^۲$، ما کی ایک قیمت ہے جو مساوات ذیل کو پورا کرتی ہے

$$لا^۲(لوک\, لا - ۱)\frac{ف^۲ ما}{ف لا^۲} - لا(۲\, لوک\, لا - ۱)\frac{ف ما}{ف لا} + ۲\, ما\, لوک\, لا = ۰$$

اس کا پورا حل معلوم کرو [آئی، سی، ایس ۱۸۹۴ء]

۲۱- عام خطی مساوات کسی ایک رقم کا نکال دینا

اب ہم زیادہ عام مساوات

$$ما_ن + ف_۱\, ما_{ن-۱} + ف_۲\, ما_{ن-۲} + \cdots + ف_ن\, ما = ق$$

پر غور کرتے ہیں جہاں $ف_۱$، $ف_۲$، .... ق، لا کے معلومہ تفاعل ہیں

رکھو $ما = وی$

تب $ما_۱ = وی_۱ + و_۱ی$

$ما_۲ = وی_۲ + ۲و_۱ی_۱ + و_۲ی$ وغیرہ

اسی طرح $وی_ن + ن\, و_۱ی_{ن-۱} + \frac{ن(ن-۱)}{۲\times۱} و_۲ی_{ن-۲} + \cdots + و_نی$

$+ ف_۱\, وی_{ن-۱} + (ن-۱) ف_۱ و_۱ی_{ن-۲} + \cdots + ف_۱ و_{ن-۱}ی$

$$+ف_۲\, و\, ی_{ن-۲} + \ldots\ldots + ف_{ن-۲}\, و\, ی$$

$$+ ف_ن\, و\, ی = ق$$

$ی_{ن-۱}$ کا سر $ن\, و_۱ + ف_۱\, و$ ہے۔

اگر $و$ کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ

$$\frac{و_۱}{و} = -\frac{ف_۱\, و\, لا}{ن} \quad \text{یا} \quad و = و^{-\frac{ف_۱\, و\, لا}{ن}}$$

تو جس رقم میں $ی_{ن-۱}$ واقع ہوتا ہے وہ خارج ہو جاتی ہے

اسی طرح اگر $و$ کو اس طرح منتخب کیا جائے کہ تفرقی مساوات

$$\frac{ن(ن-۱)}{۱\times۲}\, و_۲ + (ن-۱)\, ف_۱\, و_۱ + ف_۲\, و = ۰$$

پوری ہو تو وہ رقم جس میں $ی_{ن-۲}$ واقع ہوتا ہے خارج ہو جاتی ہے۔

$ی$ کا سر ہے

$$و_ن + ف_۱\, و_{ن-۱} + ف_۲\, و_{ن-۲} + \ldots\ldots + ف_ن\, و$$

اگر $و$ کی ایک قیمت معلوم ہو سکے یا ویسے ہی بھانپ لی جا سکے جو اوپر کے جملہ کو صفر بنا دے تو $ی_۱ =$ عا اور اس لئے $ی_۲ =$ عا$_۱$

اور $ی_ن =$ عا$_{ن-۱}$ رکھنے سے مساوات کا درجہ بقدر ایک کے

کم ہو سکتا ہے۔ طالب علم دیکھے کہ یہ جملہ شکل میں وہی ہے جو مساوات معلومہ کے دائیں جانب کا رکن ہے۔

اس لئے اگر مساوات کا کوئی حل ما = و کسی طرح سے معلوم ہو سکے جبکہ اس کا بایاں رکن حذف کیا جائے تو ما = و ی رکھنے سے اور پھر $ی_۱ =$ عا فرض کرنے سے ہم مساوات کا ایک رتبہ کم کر سکتے ہیں۔

۲۲ - صورت آئینی

جیسا اوپر بیان ہوا درجۂ دوم کی مساوات

$$ما_{۲} + ف_{۱} ما_{۱} + ف_{۲} ما = ق$$

میں $ما = و^{-\frac{۱}{۲}\int ف_{۱} ورلا} ی$ مندرج کرنے سے اصلی مساوات

بعض اوقات سادہ صورت

$$ی_{۲} + فَ ی = قَ$$

میں تحویل ہو سکتی ہے۔

لیکن اس مساوات کا عام حل ابھی تک نہیں حاصل کیا گیا۔

"ٹھیک" یا حاضر تفرقی مساوات

۲۳ - اگر $ن < ق$ تو $لا^{ن} \frac{و^{ق} ما}{ورلا^{ق}}$ کامل تفرقی ہے

اور ما خواہ کچھ ہی ہو یہ تکمل ہو سکتا ہے

کیونکہ اگر $\frac{و^{ق} ما}{ورلا^{ق}}$ کو $ما_{ق}$ سے تعبیر کیا جائے تو

$$\int لا^{ن} ما_{ق} ورلا = لا^{ن} ما_{ق-۱} - ن \int لا^{ن-۱} ما_{ق-۱} ورلا$$

$$\int لا^{ن-۱} ما_{ق-۱} ورلا = لا^{ن-۱} ما_{ق-۲} - (ن-۱) \int لا^{ن-۲} ما_{ق-۲} ورلا$$

وغیرہ

$$\int لا ما_{ق-ن+۱} ورلا = لا ما_{ق-ن} - \int ما_{ق-ن} ورلا = لا ما_{ق-ن} - ما_{ق-ن-۱}$$

اس طرح $\int لا^{ن} ما_{ق} ورلا = لا^{ن} ما_{ق-۱} - ن لا^{ن-۱} ما_{ق-۲} + ن(ن-۱) لا^{ن-۲} ما_{ق-۳} \cdots$

$$\text{لتّ}\ \text{ما}_{\text{ق - ن - ۱}} + (-1)^{\text{ن}} \text{..........}$$

ظاہر ہے کہ جب ق = ن یا > ن تو تکمل عمل میں نہیں آسکتا۔

۲۴- اوپر کے مسئلہ ابتدائی یا تمہیدیہ کی مدد سے ہم اکثر جلدی دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات معلومہ حاضر مساوات ہے یا نہیں۔ کیونکہ اگر سب سے پہلے تمام رقمیں اس شکل (لاَ$^{\text{ن}}$ ما$_{\text{ق}}$) کی جن میں ن > ق الگ کر لی جائیں تو اکثر اوقات فقط دیکھنے ہی سے ہم فوراً بتا سکتے ہیں کہ باقی ماندہ ارقام کامل تفرقی سر نہائی ہیں یا نہیں۔

مثال $\text{لا}^{2}\ \text{ما}_{۵} + \text{لا}^{۳}\ \text{ما}_{۴} + \text{لا}\ \text{ما}_{۱} + \text{ما} = \text{جب لا}$

اس جگہ تمہیدیہ کی بناء پر لاَ^{2} ما اور لاَ^{۳} ما$_{۴}$ کامل تفرقی سر ہیں اور ظاہر ہے کہ لا ما$_{۱}$ + ما بھی لا ما کا کامل تفرقی سر ہے، اس لئے اس مساوات کا پہلا تفرقی حسب ذیل ہے۔

$$\text{لا}^{2}\ \text{ما}_{۴} - ۲\ \text{لا}\ \text{ما}_{۳} + ۲\ \text{ما}_{۲} + \text{لا}^{۳}\ \text{ما}_{۳} - ۳\ \text{لا}^{2}\ \text{ما}_{۲} + ۶\ \text{لا}\ \text{ما}_{۱} - ۶\ \text{ما} + \text{لا}\ \text{ما} = -\text{جم لا} + \text{ا}$$

۲۵- جانچ کا زیادہ عام طریقہ

حاضر تفرقی مساوات کو پرکھنے کا عام طریقہ حسب ذیل ہے جبکہ مساوات عام صورت

$$\text{ف}_{\text{ب}}\ \text{ما}_{\text{ن}} + \text{ف}_{۱}\ \text{ما}_{\text{ن-۱}} + \text{ف}_{۲}\ \text{ما}_{\text{ن-۲}} + \text{.......} + \text{ف}_{\text{ن}}\ \text{ما} = \text{و}$$

میں دی گئی ہو جہاں ف$_{\text{ب}}$، ف$_{۱}$، ف$_{۲}$، .... ف$_{\text{ن}}$ کسی شکل کے لا کے تفاعل ہیں۔

اگر تفرقیوں کو زیروں سے تعبیر کیا جائے تو تکمل بالحصص سے

$$\int \text{ف}_{\text{ن}}\ \text{ما}\ \text{ءلا} = \int \text{ف}_{\text{ن}}\ \text{ما}\ \text{ءلا}$$

$\int$ ف$_{ن-۱}$ ما$_{۱}$ فرلا = ف$_{ن-۱}$ ما − $\int$ فَ$_{ن-۱}$ ما فرلا

$\int$ ف$_{ن-۲}$ ما$_{۲}$ فرلا = ف$_{ن-۲}$ ما$_{۱}$ − فَ$_{ن-۲}$ ما + $\int$ فً$_{ن-۲}$ ما فرلا

$\int$ ف$_{ن-۳}$ ما$_{۳}$ فرلا = ف$_{ن-۳}$ ما$_{۲}$ − فَ$_{ن-۳}$ ما$_{۱}$ + فً$_{ن-۳}$ ما − $\int$ فٗ$_{ن-۳}$ ما فرلا

وغیرہ وغیرہ

اس لئے جمع کرنے پر ظاہر ہے کہ اگر

ف$_{ن}$ − فَ$_{ن-۱}$ + فً$_{ن-۲}$ − فٗ$_{ن-۳}$ + ... = ۰

تو مساوات مفروضہ حاضر مساوات ہے اور اس کا پہلا تفرقی ہے

(ف$_{ن-۱}$ − فَ$_{ن-۲}$ + فً$_{ن-۳}$ − .....) ما + (ف$_{ن-۲}$ − فَ$_{ن-۳}$ + ...) ما$_{۱}$

+ (ف$_{ن-۳}$ − .....) ما$_{۲}$ + ... = $\int$ د فرلا + ا

مثال کیا مساوات لا^{۴} ما$_{۴}$ + ۱۲ لا^{۳} ما$_{۳}$ + ۳۶ لا^{۲} ما$_{۲}$ + ۲۴ لا ما = جب لا حاضر مساوات ہے؟

حاضر مساوات کو جانچنے کے طریقہ کے موافق ہم دیکھتے ہیں کہ

ف = لا^{۴}، ف$_{۱}$ = ۱۲ لا^{۳}، ف$_{۲}$ = ۳۶ لا^{۲}، ف$_{۳}$ = ۲۴ لا

اور ف$_{۳}$ − فَ$_{۲}$ + فً$_{۱}$ − فٗ = ۲۴ لا − ۷۲ لا + ۷۲ لا − ۲۴ لا = ۰

معلوم ہوا کہ یہ حاضر مساوات ہے اور اس کا پہلا تکملی ہے

(۳۶ لا^{۲} − ۳۶ لا^{۲} + ۱۲ لا^{۲}) ما + (۱۲ لا^{۳} − ۴ لا^{۳}) ما$_{۱}$ + لا^{۴} ما$_{۲}$ = − جم لا + ا

یا ۱۲ لا^{۲} ما + ۸ لا^{۳} ما$_{۱}$ + لا^{۴} ما$_{۲}$ = − جم لا + ا

دایاں رکن کامل تفرقی سر ہو گا اگر

۱۲ لا۲ - ۲۴ لا۲ + ۱۲ لا۲ = ۰

شرط پوری ہوتی ہے، پس دوسرا تکملی ہے

(۸ لا۳ - ۴ لا۳) ما + لا۴ ما۱ = - جب لا + ا لا + ب

یا ۴ لا۳ ما + لا۴ ما۱ = - جب لا + ا لا + ب

جسے پھر جانچنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ دایاں رکن کامل تفرقی سر ہے، پس تیسرا تکملی ہے

$$\text{لا}^4\ \text{ما} = \text{جم لا} + \frac{\text{ا لا}^2}{2} + \text{ب لا} + \text{ج}$$

امثلہ

۱- ثابت کرو کہ لا۵ ما۲ + ۱۵ لا۴ ما۲ + ۶۰ لا۳ ما۱ + ۶۰ لا۲ ما = ولا حاضر مساوات ہے، اسے پورے طور پر حل کرو۔

۲- مساوات ذیل کو حل کرو

لا۲ ما۲ + ۶ لا ما۲ + ۶ ما۱ + جب لا (ما۲ - ۳ ما۱) + جم لا (۳ ما۱ - ما) = جب لا

۳- ذیل کی مساواتوں کے پہلے تکملی معلوم کرو۔

(ا) لا۳ ما۲ + لا ما۱ + ما = ولا

(ب) لا۳ ما۲ + لا ما۱ - ما = لا۲ ولا

(ج) لا۵ ما۲ + لا۴ ما۱ + ما ما۱ + لا = لوک لا

۴- اگر مساوات ف۲ ما + ف۱ ما۱ + ف۰ ما۲ = و کا ایک مستکمل جزو ضربی

مہ ہو تو ثابت کرو کہ مہ ذیل کی تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے

$$\text{ف}_{۲}\,\text{مہ} - \frac{\text{د}}{\text{دلا}}\left(\text{ف}_{۱}\,\text{مہ}\right) + \frac{\text{د}^{۲}}{\text{دلا}^{۲}}\left(\text{ف}_{۰}\,\text{مہ}\right) = ۰$$

باب چہارم

مستقل سروالی خطی تفرقی مساواتیں

۲۶ - عام خطی تفرقی مساوات

ن ویں رتبہ کی عام خطی تفرقی مساوات کی شکل ہے

$$\frac{\text{ف}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{ف}\,\text{لا}^{\text{ن}}} + \text{ف}_{۱}\frac{\text{ف}^{\text{ن}-۱}\,\text{ما}}{\text{ف}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}} + \text{ف}_{۲}\frac{\text{ف}^{\text{ن}-۲}\,\text{ما}}{\text{ف}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲}} + \cdots\cdots + \text{ف}_{\text{ن}}\,\text{ما} = \text{و} \quad \cdots(۱)$$

جہاں $\text{ف}_{۱}$، $\text{ف}_{۲}$، ...... $\text{ف}_{\text{ن}}$ اور و، لا کے معلوم تفاعل ہیں۔
فرض کرو کہ مساوات کا کوئی خاص حل ما = ف (لا) ایسے ہی بھانپ لیا گیا ہے یا کسی طرح سے معلوم کر لیا گیا ہے۔
تب اگر ما = ف (لا) + ی مساوات میں مندرج کیا جائے تو حاصل ہوگا

$$\frac{\text{ف}^{\text{ن}}\,\text{ی}}{\text{ف}\,\text{لا}^{\text{ن}}} + \text{ف}_{۱}\frac{\text{ف}^{\text{ن}-۱}\,\text{ی}}{\text{ف}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱}} + \text{ف}_{۲}\frac{\text{ف}^{\text{ن}-۲}\,\text{ی}}{\text{ف}\,\text{لا}^{\text{ن}-۲}} + \cdots\cdots + \text{ف}_{\text{ن}}\,\text{ی} = ۰ \quad \cdots(۲)$$

فرض کرو کہ $\text{ی} = \text{ی}_{۱}$، $\text{ی} = \text{ی}_{۲}$، .... $\text{ی} = \text{ی}_{\text{ن}}$ اس مساوات کے حل ہیں

تب ظاہر ہے کہ $\text{ی} = \text{ا}_{۱}\text{ی}_{۱} + \text{ا}_{۲}\text{ی}_{۲} + \text{ا}_{۳}\text{ی}_{۳} + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\text{ی}_{\text{ن}}$

بھی مساوات (۲) کا حل ہے اور اس میں ن مستقل $\text{ا}_{۱}$، $\text{ا}_{۲}$، $\text{ا}_{۳}$ ... $\text{ا}_{\text{ن}}$ شامل ہیں۔

اسلئے $\text{ما} = \text{ا}_{۱}\text{ی}_{۱} + \text{ا}_{۲}\text{ی}_{۲} + \text{ا}_{۳}\text{ی}_{۳} + \cdots\cdots + \text{ا}_{\text{ن}}\text{ی}_{\text{ن}} + \text{ف}(\text{لا})$

مساوات کا ایک ایسا حل ہے جس میں ن مستقل شامل ہیں اور اس لئے

یہ مساوات کا عام سے عام حل ہے، مساوات کا اس سے زیادہ عام حل نہیں معلوم کیا گیا۔

اس کا حصہ ف (لا) **خاص تکملی** (خ، ک) کہلاتا ہے اور اس کے باقی ماندہ حصہ کو جس میں ن مستقل شامل ہیں متمم تفاعل (م، ت) کہتے ہیں، ظاہر ہے کہ متمم تفاعل اُس مساوات کا حل ہے جو اصلی مساوات میں بائیں رکن کو صفر کے مساوی رکھنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اگر یہ دونوں حل معلوم ہو جائیں تو مساوات کا پورا حل ان کا مجموعہ ہے۔

۲۷۔ دو مشہور صورتیں دو صورتیں ہیں جن کے حل بالعموم آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

(۱) جب مقداریں ف۱، ف۲ ...... فن سب مستقل ہوں

(۲) جب مساوات، ذیل کی شکل اختیار کرے

$$\text{لا}^{\text{ن}}\frac{\text{د}^{\text{ن}}\text{ ما}}{\text{د لا}^{\text{ن}}}+\text{ا}_1\text{ لا}^{\text{ن}-1}\frac{\text{د}^{\text{ن}-1}\text{ ما}}{\text{د لا}^{\text{ن}-1}}+\text{ا}_2\text{ لا}^{\text{ن}-2}\frac{\text{د}^{\text{ن}-2}\text{ ما}}{\text{د لا}^{\text{ن}-2}}+\ldots\ldots+\text{ا}_{\text{ن}}\text{ ما}=\text{ص}$$

جہاں ا۱، ا۲ ..... ان مستقل ہیں اور ص، لا کا کوئی تفاعل ہے۔

آگے چلکر معلوم ہوگا کہ دوسری صورت کا حل ایک ایسی مساوات کے حل پر موقوف ہو سکتا ہے جو پہلی قسم کے تحت میں آتی ہیں۔

مستقل سروں والی مساواتیں۔ متمم تفاعل

۲۸۔ سب سے پہلے ہم اس طرح کی مساوات

$$\text{ما}_{\text{ن}}+\text{ا}_1\text{ ما}_{\text{ن}-1}+\text{ا}_2\text{ ما}_{\text{ن}-2}+\ldots\ldots+\text{ا}_{\text{ن}}\text{ ما}=\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

کا حل معلوم کرتے ہیں جس میں تمام سر مستقل مقداریں ہیں اور بایاں رکن صفر ہے، یعنی فی الحال ہم صرف "متمم تفاعل" معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

آزمائش کے طور پر فرض کرو کہ $ما = ا و^{م لا}$ مساوات کا حل ہے، اسے مندرج کرنے سے حاصل ہوگا

$$م^{ن} + ا_{۱} م^{ن-۱} + ا_{۲} م^{ن-۲} + \cdots + ا_{ن} = ۰ \quad \cdots\cdots (۲)$$

فرض کرو کہ اس مساوات کی اصلیں

$$م_{۱}،\ م_{۲}،\ م_{۳}،\ \cdots\cdots\ م_{ن}$$

ہیں جنہیں ہم فی الحال ایک دوسرے کے نا مساوی فرض کرتے ہیں

تب $ا_{۱} و^{م_{۱} لا}$، $ا_{۲} و^{م_{۲} لا}$، $ا_{۳} و^{م_{۳} لا}$، ...... $ا_{ن} و^{م_{ن} لا}$

تمام حل ہیں اور اس لئے

$$ما = ا_{۱} و^{م_{۱} لا} + ا_{۲} و^{م_{۲} لا} + ا_{۳} و^{م_{۳} لا} + \cdots + ا_{ن} و^{م_{ن} لا} \quad \cdots\cdots (۳)$$

ایک ایسا حل ہے جس میں ن اختیاری مستقلات $ا_{۱}$، $ا_{۲}$، $ا_{۳}$.... $ا_{ن}$ شامل ہیں اور یہ عام سے عام حل ہے جو حاصل ہو سکتا ہے۔

۲۹ - دو اصلیں مساوی

اگر مساوات (۲) کی دو اصلیں مساوی ہوں مثلاً $م_{۱} = م_{۲}$ تو حل (۳) کی پہلی دو رقمیں ہو جاتی ہیں $(ا_{۱} + ا_{۲}) و^{م_{۱} لا}$،

اب چونکہ $ا_{۱} + ا_{۲}$ ایک ہی مستقل ہے، اس لئے اختیاری مستقلات کی تعداد میں ایک کی کمی ہو جاتی ہے اور اس لحاظ سے (۳) مساوات

مذکورہ کا عام سے عام حل نہیں رہتا۔

اب ہم اسے زیادہ غور سے دیکھتے ہیں

فرض کرو کہ $\text{م}_2 = \text{م}_1 + \text{ھ}$

تب $\text{ا}_1 \text{و}^{\text{م}_1 \text{لا}} + \text{ا}_2 \text{و}^{(\text{م}_1 + \text{ھ})\text{لا}}$

$$= \text{ا}_1 \text{و}^{\text{م}_1 \text{لا}} + \text{ا}_2 \text{و}^{\text{م}_1 \text{لا}} \left(1 + \text{ھ لا} + \frac{\text{ھ}^2 \text{لا}^2}{\underline{|2}} + \ldots\ldots \right)$$

$$= (\text{ا}_1 + \text{ا}_2) \text{و}^{\text{م}_1 \text{لا}} + \text{ا}_2 \text{ھ لا و}^{\text{م}_1 \text{لا}} + \text{ا}_2 \text{ھ} \ \text{و}^{\text{م}_1 \text{لا}} \left[\frac{\text{ھ لا}^2}{\underline{|2}} + \ldots\ldots \right]$$

اب چونکہ ا_1 اور ا_2 دو بے تعلق اختیاری مقداریں ہیں، اس لئے انہیں ہم دو اور بے تعلق اختیاری مقداروں کی رقوم میں دو ربطوں کے ذریعہ جنہیں ہم اختیار کرنا چاہیں بیان کر سکتے ہیں۔

اولاً ا_2 کو اتنا بڑا مانو کہ بالآخر حاصل ضرب $\text{ا}_2 \text{ھ}$ جہاں ھ لاانتہا کم ہے ب_2 کے مساوی ہو جو ایک اختیاری محدود مستقل ہے۔
ثانیاً ا_1 کو ا_2 سے مختلف العلامت مانو اور اس کی قیمت اتنی بڑی منتخب کرو کہ $\text{ا}_1 + \text{ا}_2$ ایک اختیاری محدود مستقل ب_1 کے مساوی ہو۔ اب رقوم

$$\text{ا}_2 \text{ھ و}^{\text{م}_1 \text{لا}} \left[\frac{\text{ھ لا}^2}{\underline{|2}} + \ldots\ldots\ldots \right]$$

ھ کے معدوم ہونے کی وجہ سے فنا ہو جائیں گی کیونکہ $\text{ا}_2 \text{ھ}$ محدود ہے اور مربع خطوط وحدانی کے اندر کا جملہ مستدق ہے اور اس میں ھ بطور جزو ضربی کے شریک ہوتا ہے۔

پس اگر $\text{م}_1 = \text{م}_2$ تو رقوم $\text{ا}_1 \text{و}^{\text{م}_1 \text{لا}} + \text{ا}_2 \text{و}^{\text{م}_2 \text{لا}}$ کی بجائے ہم $\text{ب}_1 \text{و}^{\text{م}_1 \text{لا}} + \text{ب}_2 \text{لا و}^{\text{م}_1 \text{لا}}$ لکھ سکتے ہیں، اس لئے حل مذکور میں اختیاری

مستقلات کی تعداد ن ہی رہتی ہے۔ پس اس صورت میں یہ مساوات کا عام حل ہے۔

۳۰۔ **تین اصلیں مساوی** اب ہم اُس صورت پر غور کرتے ہیں جبکہ مساوات (۲) کی تین اصلیں مساوی ہوں یعنی $م_۱ = م_۲ = م_۳$

حسب بالا رقوم $ا_۱ و^{م_۱ لا} + ا_۲ و^{م_۲ لا} + ا_۳ و^{م_۳ لا}$ کی بجائے ہم

$(ب_۱ + ب_۲ لا) و^{م_۱ لا} + ا_۳ و^{م_۳ لا}$ رکھ سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ $م_۳ = م_۱ + ک$

تب $ا_۳ و^{م_۳ لا} = ا_۳ و^{م_۱ لا} و^{ک لا} = ا_۳ و^{م_۱ لا}\left(۱ + ک لا + \frac{ک^۲ لا^۲}{\lfloor ۲} + \cdots\right)$

پس $ا_۱ و^{م_۱ لا} + ا_۲ و^{م_۲ لا} + ا_۳ و^{م_۳ لا}$ کی بجائے ہم

$$(ب_۱ + ا_۳) و^{م_۱ لا} + (ب_۲ + ا_۳ ک) لا و^{م_۱ لا} + \frac{ا_۳ ک^۲ لا^۲ و^{م_۱ لا}}{\lfloor ۲}$$

$$+ ا_۳ ک^۲ لا^۲ و^{م_۱ لا} \left[\frac{ک لا}{\lfloor ۳} + \frac{ک^۲ لا^۲}{\lfloor ۴} + \cdots\cdots\right]$$

رکھ سکتے ہیں اور $ا_۳$، $ب_۲$، $ب_۱$ کو اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ

$ب_۱ + ا_۳ = ج_۱$

$ب_۲ + ا_۳ ک = ج_۲$

$ا_۳ ک^۲ = ۲ ج_۳$

جہاں $ج_۱$، $ج_۲$، $ج_۳$ کوئی اختیاری مستقل ہیں، خواہ ک کچھ ہی ہو

بشرطیکہ یہ صفر مطلق نہ ہو۔ لیکن چونکہ $ا_۱ ک^۲$ کو ایک محدود مقدار کے مساوی منتخب کیا گیا ہے اور خطوط وحدانی کے اندر کا سلسلہ مستدق ہے اس لئے ظاہر ہے کہ ک کو لاانتہا کم کرنے سے بالآخر اس جملہ کی انتہائی صورت یہ ہوگی $(ج_۱ + ج_۲ لا + ج_۳ لا^۲) و^{م_۱ لا}$ ۔

۳۱۔ کئی اصلیں مساوی اس طرح ظاہر ہے کہ اگر مساوات (۲) کی ع اصلیں مساوی ہوں یعنی

$$م_۱ = م_۲ = م_۳ = \dots\dots = م_ع$$

تو ہمارے حل کی عمومیت میں کسی قسم کا فرق نہیں آئے گا اگر ہم متمم تفاعل کے متناظر حصہ

$$ا_۱ و^{م_۱ لا} + ا_۲ و^{م_۲ لا} + \dots\dots + ا_ع و^{م_ع لا}$$

کے لئے جملہ $(ک_۱ + ک_۲ لا + ک_۳ لا^۲ + \dots\dots + ک_ع لا^{ع-۱}) و^{م_۱ لا}$ رکھدیں

۳۲۔ تعمیم زیادہ عام طور پر اگر کوئی خطی تفرقی مساوات ہو جس کے سر خواہ مستقل ہوں یا نہ ہوں اور اس کا متمم تفاعل

$$ا_۱ فہ(م_۱) + ا_۲ فہ(م_۲) + ا_۳ فہ(م_۳) + \dots\dots + ا_ن فہ(م_ن)$$

ہو تو معلوم کرو کہ جس صورت میں $م_۱ = م_۲$ ہو تو اس جملہ کی بجائے کیا رکھا جائے۔

فرض کرو کہ $م_۲ = م_۱ + ھ$

تب $فہ(م_۲) = فہ(م_۱ + ھ) = فہ(م_۱) + ھ \frac{فر\, فہ(م_۱)}{فر\, م_۱} + \frac{ھ^۲}{۲!} \frac{فر^۲ فہ(م_۱)}{فر\, م_۱^۲} + \dots$

اور رقمیں $ا_۱ فہ(م_۱) + ا_۲ فہ(م_۲)$ ہوجائینگی

$$(\text{ا}_1+\text{ا}_2)\,\text{فہ}(\text{م}_1)+\text{ا}_2\,\text{ھ}\,\frac{\text{و فہ}(\text{م}_1)}{\text{و م}_1}+\text{ا}_2\,\frac{\text{ھ}^2}{\lfloor 2}\,\frac{\text{و}^2\,\text{فہ}(\text{م}_1)}{\text{و م}_1^2}+\ldots\ldots$$

اب رکھو $\text{ا}_1+\text{ا}_2=\text{ب}_1$ اور $\text{ا}_2\,\text{ھ}=\text{ب}_2$ جہاں ب_1 اور ب_2 دو محدود مستقل ہیں۔ جب ہم ھ کو لاانتہا کم کرینگے تو اوپر کے سلسلہ کی باقی رقمیں بالآخر معدوم ہو جائیں گی۔

پس ا_1 فہ (م_1) + ا_2 فہ (م_2) کی بجائے

$\text{ب}_1\,\text{فہ}(\text{م}_1)+\text{ب}_2\,\frac{\text{و فہ}(\text{م}_1)}{\text{و م}_1}$ رکھا جا سکتا ہے اور اس طرح

متمم تفاعل میں اختیاری مستقلات ب_1، ب_2، ا_3، ا_4 ...... $\text{ا}_\text{ن}$ کی وہی تعداد (ن) قائم رہتی ہے جو پہلے تھی۔

اور دفعہ ۳۱ کی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ع اصلیں مساوی ہوں یعنی $\text{م}_1=\text{م}_2=\text{م}_3=\ldots\ldots=\text{م}_\text{ع}$

تو رقوم ا_1 فہ (م_1) + ا_2 فہ (م_2) + ... + $\text{ا}_\text{ع}$ فہ $(\text{م}_\text{ع})$

کی بجائے ہم

$$\text{ب}_1\,\text{فہ}(\text{م}_1)+\text{ب}_2\,\frac{\text{و فہ}(\text{م}_1)}{\text{و م}_1}+\text{ب}_3\,\frac{\text{و}^2\,\text{فہ}(\text{م}_1)}{\text{و م}_1^2}+\ldots\ldots+\text{ب}_\text{ع}\,\frac{\text{و}^{\text{ع}-1}\,\text{فہ}(\text{م}_1)}{\text{و م}_1^{\text{ع}-1}}$$

رکھ سکتے ہیں جس سے حل کی عام شکل قائم رہتی ہے۔

دفعات ۲۹، ۳۰، ۳۱ کے نتائج اس نتیجہ کی خاص صورتیں ہیں کہ ان میں فہ (م_1) کی صورت $\text{و}^{\text{م}_1\text{لا}}$ تھی۔

۳۳- خیالی اصلیں اگر دفعہ ۲۸ مساوات (۲) کی ایک اصل خیالی ہو تو یاد رہے کہ حقیقی سروں والی مساواتوں میں خیالی اصلوں کے ہمیشہ جوڑے واقع ہوتے ہیں۔

مثلاً فرض کرو کہ م۱ = ا + خ ب، م۲ = ا - خ ب جہاں خ = $\sqrt{-1}$

تب رقوم ا۱ و^(م۱ لا) + ا۲ و^(م۲ لا) یا ا۱ و^((ا+خ ب)لا) + ا۲ و^((ا-خ ب)لا)

حقیقی صورت میں اس طرح لائی جاسکتی ہیں:-

ا۱ و^(ا لا) و^(خ ب لا) + ا۲ و^(ا لا) و^(-خ ب لا)

= ا۱ و^(ا لا) (جم ب لا + خ جب ب لا) + ا۲ و^(ا لا) (جم ب لا - خ جب ب لا)

= (ا۱ + ا۲) و^(ا لا) جم ب لا + (ا۱ - ا۲) خ و^(ا لا) جب ب لا

= ب۱ و^(ا لا) جم ب لا + ب۲ و^(ا لا) جب ب لا

جہاں ا۱ + ا۲ اور (ا۱ - ا۲) خ کی بجائے

اختیاری مستقل ب۱ اور ب۲ رکھے گئے ہیں۔

فرض کرو کہ ب۱ = د جم عہ، ب۲ = د جب عہ تب

د = $\sqrt{}$ب۱^۲ + ب۲^۲ اور عہ = مس^(-۱) (ب۲ / ب۱)

ب۱ جم ب لا + ب۲ جب ب لا = د جم (ب لا - عہ)

پس اس طرح ہم

ب$_1$ و$^{\text{لا}}$ جم ب لا + ب$_2$ و$^{\text{لا}}$ جب ب لا کی بجائے

ج$_1$ و$^{\text{لا}}$ جم (ب لا + ج$_2$)

رکھ سکتے ہیں جہاں ج$_1$، ج$_2$ اختیاری مستقل ہیں۔

۴۷- مکرر خیالی اصلیں

مکرر خیالی اصلوں کے لئے ہم پہلے کی طرح عمل کر سکتے ہیں کیونکہ یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر م$_2$ = م$_1$ تو ا$_1$ و$^{\text{م}_1\text{لا}}$ + ا$_2$ و$^{\text{م}_2\text{لا}}$ کی بجائے

(ب$_1$ + ب$_2$ لا) و$^{\text{م}_1\text{لا}}$ لکھا جا سکتا ہے اور ا$_3$ و$^{\text{م}_3\text{لا}}$ + ا$_4$ و$^{\text{م}_4\text{لا}}$ کی بجائے

(ب$_3$ + ب$_4$ لا) و$^{\text{م}_3\text{لا}}$

پھر اگر م$_1$ = م$_2$ = ا + خ ب اور م$_3$ = م$_4$ = ا − خ ب تو ہم

ا$_1$ و$^{\text{م}_1\text{لا}}$ + ا$_2$ و$^{\text{م}_2\text{لا}}$ + ا$_3$ و$^{\text{م}_3\text{لا}}$ + ا$_4$ و$^{\text{م}_4\text{لا}}$

کی بجائے (ب$_1$ + ب$_2$ لا) و$^{\text{الا}}$ و$^{\text{خ ب لا}}$ + (ب$_3$ + ب$_4$ لا) و$^{\text{الا}}$ و$^{-\text{خ ب لا}}$

یعنی و$^{\text{الا}}$ [(ب$_1$ + ب$_3$) جم ب لا + (ب$_1$ − ب$_3$) خ جب ب لا]

+ لا و$^{\text{الا}}$ [(ب$_2$ + ب$_4$) جم ب لا + (ب$_2$ − ب$_4$) خ جب ب لا]

اور اسلئے و$^{\text{الا}}$ (ج$_1$ جم ب لا + ج$_2$ جب ب لا) + لا و$^{\text{الا}}$ (ج$_3$ جم ب لا + ج$_4$ جب ب لا)

یعنی $و^{لا}(ج_۱ + لا\, ج_۲)\, جم\, ب\, لا + و^{لا}(ج_۳ + لا\, ج_۴)\, جب\, ب\, لا$

یا دوسری صورت میں $د_۱\, و^{لا}\, جم(ب\, لا + د_۲) + د_۳\, لا\, و^{لا}\, جم(ب\, لا + د_۴)$

لکھ سکتے ہیں۔

آخری تین صورتوں میں سے ہر ایک میں چار اختیاری مستقل شامل ہوتے ہیں جو ابتدا کے اختیاری مستقلات $ا_۱$، $ا_۲$، $ا_۳$، $ا_۴$ کی بجائے ہیں پس اس صورت میں بھی اختیاری مستقلات کی تعداد (ن) ہی رہتی ہے جو اس حل کو عام سے عام بنانے کے لئے ضروری ہے۔

ظاہر ہے کہ اس قاعدہ کی توسیع اُس صورت میں بھی ہو سکتی ہے جبکہ خیالی اصلوں کی کوئی سی تعداد مساوی ہو۔

۳۵۔ مساوات $\frac{د^۲ ما}{د لا^۲} - ۳ \frac{د ما}{د لا} + ۲\, ما = ۰$ کو حل کرو

اس جگہ آزمائشی حل $ما = ا\, و^{م لا}$ ہے، اس کو مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$م^۲ - ۳\, م + ۲ = ۰$$

جبکی اصلیں ۱ اور ۲ ہیں۔

پس $ما = ا_۱\, و^{لا}$ اور $ما = ا_۲\, و^{۲لا}$ دونوں خاص حل ہیں اور

$$ما = ا_۱\, و^{لا} + ا_۲\, و^{۲لا}$$

عام حل ہے جس میں دو اختیاری مستقل ہیں۔

مثال ۲۔ حل کرو $\frac{د^۲ ما}{د لا^۲} - ا^۲\, ما = ۰$ کو

یہاں امدادی مساوات $م^۲ - ا^۲ = ۰$ ہے اور اس کی اصلیں $م = \pm ا$

اور عام حل ہے $ما = ا_۱ و^{ا لا} + ا_۲ و^{-ا لا}$

اور اگر ضرورت ہو تو اسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں

$ما = ب_۱ جمنر ا لا + ب_۲ جبنر ا لا$

جہاں $ا_۱$ کی بجائے $\frac{ب_۱ + ب_۲}{۲}$ اور $ا_۲$ کی بجائے $\frac{ب_۱ - ب_۲}{۲}$ لکھا گیا ہے

مثال ۳ - $\frac{و^۲ ما}{و لا^۲} + ا^۲ ما = ۰$ کو حل کرو

یہاں امدادی مساوات $م^۲ + ا^۲ = ۰$ کی اصلیں $م = \pm ا خ$ ہیں

اور عام حل ہے $ما = ا_۱ جم ا لا + ا_۲ جب ا لا$

یا دوسری صورت میں $ما = ب_۱ جم (ا لا + ب_۲)$

مثال ۴ - $\frac{و^۳ ما}{و لا^۳} - ۴ \frac{و^۲ ما}{و لا^۲} + ۵ \frac{و ما}{و لا} - ۲ ما = ۰$

یا $(عف - ۱)^۲ (عف - ۲) ما = ۰$ جہاں $\frac{و}{و لا}$ کی بجائے عف لکھا گیا ہے۔

امدادی مساوات ہے $م^۳ - ۴ م^۲ + ۵ م - ۲ = ۰$

یا $(م - ۱)^۲ (م - ۲) = ۰$ یعنی اصلیں ۱، ۱، ۲ ہیں

پس عام حل ہے $ما = (ا_۱ + ا_۲ لا) و^{لا} + ا_۳ و^{۲ لا}$

مثال ۵ - $(عف^۲ + ۱) (عف - ۱) ما = ۰$

امدادی مساوات ہے $(م^۲ + ۱) (م - ۱) = ۰$

جس کی اصلیں $\pm خ$، ۱ ہیں، اس لئے عام حل ہے

$ما = ا_۱ جم لا + ا_۲ جب لا + ا_۳ و^{لا}$

$$\text{یا}\quad \text{ما} = \text{ب}_1\ \text{جم}\,(\text{لا} + \text{ب}_2) + \text{ا}_3\ \text{و}^{\text{لا}}$$

مثال ۶ ۔ حل کرو $(\text{عف}^2 + \text{عف} + 1)(\text{عف} - 2)\ \text{ما} = 0$ کو

امدادی مساوات ہے $(\text{م}^2 + \text{م} + 1)(\text{م} - 2) = 0$

اور اس کی اصلیں ہیں $-\frac{1}{2} \pm \text{خ}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$ اور ۲ اس لئے عام حل ہے

$$\text{ما} = \text{ا}_1\ \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{2}}\ \text{جم}\,\frac{\text{لا}\sqrt{3}}{2} + \text{ا}_2\ \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{2}}\ \text{جب}\,\frac{\text{لا}\sqrt{3}}{2} + \text{ا}_3\ \text{و}^{2\text{لا}}$$

$$\text{یا}\quad \text{ما} = \text{ب}_1\ \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{2}}\ \text{جم}\left(\frac{\text{لا}\sqrt{3}}{2} + \text{ب}_2\right) + \text{ا}_3\ \text{و}^{2\text{لا}}$$

مثال ۷ ۔ $(\text{عف}^2 + \text{عف} + 1)^2 (\text{عف} - 2)^3 (\text{عف} - 5)\ \text{ما} = 0$ کو حل کرو

صریحاً اس کا عام حل ہے

$$\text{ما} = (\text{ا}_1 + \text{ا}_2\,\text{لا})\ \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{2}}\ \text{جم}\,\frac{\text{لا}\sqrt{3}}{2} + (\text{ا}_3 + \text{ا}_4\,\text{لا})\ \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{2}}\ \text{جب}\,\frac{\text{لا}\sqrt{3}}{2}$$

$$+ (\text{ا}_5 + \text{ا}_6\,\text{لا} + \text{ا}_7\,\text{لا}^2)\ \text{و}^{2\text{لا}} + \text{ا}_8\ \text{و}^{5\text{لا}}$$

جس میں آٹھ اختیاری مستقل شامل ہیں ۔

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

۱۔ $\frac{\text{ف}^2\,\text{ما}}{\text{فلا}^2} - (\text{ا} + \text{ب})\frac{\text{ف}\,\text{ما}}{\text{فلا}} + \text{اب}\ \text{ما} = 0$

۲۔ $\frac{\text{ف}^3\,\text{ما}}{\text{فلا}^3} - 6\text{ا}\,\frac{\text{ف}^2\,\text{ما}}{\text{فلا}^2} + 11\text{ا}^2\,\frac{\text{ف}\,\text{ما}}{\text{فلا}} - 6\text{ا}^3\ \text{ما} = 0$

۳۔ $\frac{\text{ف}^3\,\text{ما}}{\text{فلا}^3} - 9\,\frac{\text{ف}^2\,\text{ما}}{\text{فلا}^2} + 23\,\frac{\text{ف}\,\text{ما}}{\text{فلا}} - 15\ \text{ما} = 0$

۴۔ $\frac{\text{ڈ}^3 \text{ما}}{\text{ڈلا}^3}$ ۔ ۳ $\frac{\text{ڈما}}{\text{ڈلا}}$ + ۲ ما = ۰ ۵۔ $\frac{\text{ڈ}^3 \text{ما}}{\text{ڈلا}^3}$ = ما

۶۔ $\frac{\text{ڈ}^4 \text{ما}}{\text{ڈلا}^4}$ = ما ۷۔ (عف۔۱)^2 (عف۔۲)^3 ما = ۰

۸۔ (عف^2 + ۱) (عف^2 + عف + ۱) ما = ۰ ۹۔ (عف^2 + ۱)^2 (عف ۔ ۱)^2 ما = ۰

۱۰۔ (عف^2 + ۱)^3 (عف^2 + عف + ۱)^2 ما = ۰

۱۱۔ (عف ۔ ۱)^3 (عف ۔ ۲) (عف^2 + ۲ عف + ۲)^2 ما = ۰

۱۲۔ (عف^2 + ا^2)^2 (عف^2 + ب^2) (عف^4 + ج^2 عف^2 + ج^4) ما = ۰

خاص تکملی

۳۶۔ اوپر ہم نے مساوات ف (عف) ما = و کے متمم تفاعل پر غور کیا ہے جہاں

ف (عف) = عف$^{\text{ن}}$ + ا$_1$ عف$^{\text{ن}-1}$ + ا$_2$ عف$^{\text{ن}-2}$ + ... + ا$_{\text{ن}}$

اور ا$_1$، ا$_2$، ..... ، ا$_{\text{ن}}$ مستقل ہیں و، لا کا کوئی تفاعل ہے، اب ہم اس مساوات کے خاص تکملی کو حاصل کرنے کے چند کارآمد طریقوں پر غور کرتے ہیں ۔

ہم اوپر کی مساوات کو اس طرح لکھتے ہیں ما = $\frac{1}{\text{ف (عف)}}$ و

یا [ف (عف)]$^{-1}$ و جہاں $\frac{1}{\text{ف (عف)}}$ ایک ایسا عامل ہے کہ

ف (عف) [$\frac{1}{\text{ف (عف)}}$ و] ≡ و ۔

۳۷۔ "عف" جبرومقابلہ کے اساسی اصولوں کو پورا کرتا ہے
تفرقی احصا میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ عامل عف

(یعنی $\frac{د}{د لا}$) قوانین ذیل کو پورا کرتا ہے

(۱) جبرومقابلہ کا تقسیمی قانون یعنی

$$عف(ی + و + ھ + \ldots) = عف ی + عف و + عف ھ + \ldots$$

(۲) قانون مبادلہ صرف بلحاظ مستقلوں کے یعنی

$$عف(ج ی) = ج(عف ی)$$

(۳) قانون قوت نما یعنی

$$عف^{م} عف^{ن} ی = عف^{م+ن} ی$$

جہاں م، ن مثبت صحیح ہیں۔
پس رمز یا علامت عف جبریہ مقادیر کی باہمی ترکیب کے تمام ابتدائی قوانین کو پورا کرتی ہے صرف متغیر مقداروں کے ساتھ اس کا تبادلہ نہیں ہو سکتا۔
پس معلوم ہوا کہ کسی منطق جبریہ تماثل کے جواب میں عاملوں کا بھی ایک متناظر تماثل ہوگا مثلاً مسئلہ ثنائی کی رو سے

$$(م + ا)^{ن} = م^{ن} + ن ا م^{ن-۱} + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} ا^{۲} م^{ن-۲} + \ldots + ا^{ن}$$

اور ایسے ہی بغیر مزید ثبوت کے عاملوں کے لئے متناظر مسئلہ کی رو سے

$$(عف + ا)^{ن} ما = \left\{ عف^{ن} + ن ا عف^{ن-۱} + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} ا^{۲} عف^{ن-۲} + \ldots + ا^{ن} \right\} ما$$

$$= عف^{ن} ما + ن ا عف^{ن-۱} ما + \frac{ن(ن-۱)}{۲ \times ۱} ا^{۲} عف^{ن-۲} ما + \ldots + ا^{ن} ما$$

۳۸ — عمل $ف\,(عف)\,و^{الا}$

تفرقی احصا میں یہ ثابت ہو چکا ہے کہ اگر ر مثبت صحیح ہو تو

$$عف^{ر}\,و^{الا} = ا^{ر}\,و^{الا}$$

فرض کرو کہ عمل $عف^{-ر}$ ایسا ہے کہ

$$عف^{ر}\,عف^{-ر}\,ی = ی$$

اس تعریف کے مطابق $عف^{-۱}$ عمل تکمل کو تعبیر کرتا ہے، ہم فرض کرتے ہیں کہ عمل $عف^{-۱}\,ی$ میں کسی اختیاری مستقل کا اضافہ نہیں ہوتا (کیونکہ یہاں ہمیں صرف ایک خاص تکملی کی تلاش ہے نہ کہ عام سے عام تکملی کی)

$$اب چونکہ\quad عف^{ر}\,ا^{-ر}\,و^{الا} = و^{الا} = عف^{ر}\,عف^{-ر}\,و^{الا}$$

$$اس سے ظاہر ہے کہ\quad عف^{-ر}\,و^{الا} = ا^{-ر}\,و^{الا}$$

اس لئے ظاہر ہے کہ ن کی تمام مثبت، منفی صحیح قیمتوں کے لئے

$$عف^{ن}\,و^{الا} = ا^{ن}\,و^{الا}$$

۳۹ — فرض کرو کہ $ف\,(ی)$ کوئی جملہ ی کا ہے جو ی کی مثبت یا منفی صحیح قوتوں میں ($= \sum ا_{ر}\,ی^{ر}$ جہاں $ا_{ر}$ ایک مستقل ہے اور ی پر منحصر نہیں ہے) پھیل سکتا ہے

$$تب\quad ف\,(عف)\,و^{الا} = (\sum ا_{ر}\,عف^{ر})\,و^{الا}$$

$$= \sum (ا_{ر}\,عف^{ر}\,و^{الا})$$

$$= (\sum ا_{ر}\,ا^{ر})\,و^{الا}$$

$= ف(ا) و^{ا لا}$

عمل $ف(عف) و^{ا لا}$ کا جو حاصل ہے وہ عف کی بجائے ا رکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ $\frac{1}{عف^{3}+عف^{2}+عف+1} و^{2لا}$ کی قیمت معلوم کرو۔

اس قاعدہ کی رو سے قیمت مطلوبہ ہے

$$\frac{1}{1+2+2^{2}+2^{3}} و^{2لا} \quad یا \quad \frac{و^{2لا}}{15}$$

مثال ۲۔ $\frac{عف+1}{(عف+2)(عف+3)(عف+4)} و^{3لا}$ کی قیمت معلوم کرو

اس قاعدہ کی رو سے قیمت مطلوبہ ہے $\frac{4}{5\times6\times7} و^{3لا} = \frac{2}{105} و^{3لا}$

امثلہ

۱۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

(۱) $\frac{1}{(عف+1)^{2}} و^{لا}$　　(۲) $\frac{1}{(عف+1)(عف+2)} و^{ا لا}$

(۳) $\frac{1}{(عف+2)(عف+3)(عف+4)}$ جمز لا

۲۔ ثابت کرو کہ $\frac{عف^{2}}{(عف-ا)(عف-ب)(عف-ج)} و = \sum \frac{ا^{2}}{(ا-ب)(ا-ج)} \cdot \frac{1}{عف-ا}$

۳۔ ذیل کے نتائج ثابت کرنے میں دفعہ ۳۹ کو استعمال کرو

$ف(عف^{2})$ جب م لا $= ف(-م^{2})$ جب م لا

$ف(عف^{2})$ جم م لا $= ف(-م^{2})$ جم م لا

ف (عف^{۲}) جمز^{جمز} م لا = ف (م^{۲}) جمز^{جمز} م لا

۴۰ - عمل ف (عف) و$^{ا لا}$ لا

فرض کروکہ ما = و$^{ا لا}$ ما جہاں ما، لا کا تفاعل ہے۔

تب چونکہ عف^{ر} و$^{ا لا}$ = ا^{ر} و$^{ا لا}$

اس لئے لیب نیزر کے مسئلہ کی رو سے

ما$_{ن}$ = و$^{ا لا}$ (ا^{ن} ما + ج$_{۱}^{ن}$ ا$^{ن-۱}$ عف ما + ج$_{۲}^{ن}$ ا$^{ن-۲}$ عف^{۲} ما + ... + عف^{ن} ما)

جسے مسئلہ ثنائی کی طرح لکھنے سے حاصل ہوتا ہے [دفعہ ۲۷]

عف^{ن} و$^{ا لا}$ ما = و$^{ا لا}$ (عف + ا)^{ن} ما

جہاں ن مثبت صحیح ہے۔

اب فرض کروکہ (عف + ا)^{ن} ما = لا

جسے ہم لکھ سکتے ہیں ما = (عف + ا)$^{-ن}$ لا

تب چونکہ عف^{ن} و$^{ا لا}$ ما = و$^{ا لا}$ (عف + ا)^{ن} ما

یا عف^{ن} و$^{ا لا}$ (عف + ا)$^{-ن}$ لا = و$^{ا لا}$ لا

اس لئے عف$^{-ن}$ و$^{ا لا}$ لا = و$^{ا لا}$ (عف + ا)$^{-ن}$ لا

اس لئے تمام صورتوں میں ن کی مثبت، منفی صحیح قیمتوں کے لئے

عف^{ن} و$^{ا لا}$ لا = و$^{ا لا}$ (عف + ا)^{ن} لا

۴۱ - جیسا دفعہ ۳۹ میں ہم نے دیکھا

$$\text{ف}(\text{عف})\ \text{و}^{\text{ا لا}}\ \text{لا} = \text{مج}\ (\text{ا}_{\text{ر}}\ \text{عف}^{\text{ر}})\ \text{و}^{\text{ا لا}}\ \text{لا}$$

$$= \text{مج}\ (\text{ا}_{\text{ر}}\ \text{عف}^{\text{ر}}\ \text{و}^{\text{ا لا}}\ \text{لا})$$

$$= \text{و}^{\text{ا لا}}\ \text{مج}\ \text{ا}_{\text{ر}}\ (\text{عف} + \text{ا})^{\text{ر}}\ \text{لا}$$

$$= \text{و}^{\text{ا لا}}\ \text{ف}\ (\text{عف} + \text{ا})\ \text{لا}$$

یعنے $\text{و}^{\text{ا لا}}$ کو ہم عامل ف (عف) کے بائیں جانب سے دائیں جانب لا سکتے ہیں بشرطیکہ ہم عف کی بجائے عف + ا لکھدیں۔

مثال ۱ - $\frac{1}{(\text{عف}-1)^{3}}\ \text{و}^{\text{لا}}\ \text{لا} = \text{و}^{\text{لا}}\ \frac{1}{\text{عف}^{3}}\ \text{لا} = \text{و}^{\text{لا}}\ \frac{\text{لا}^{4}}{2\times3\times4}$

مثال ۲ - $\frac{1}{\text{عف}^{2}-4\,\text{عف}+4}\ \text{و}^{2\text{لا}}\ \text{جب لا} = \text{و}^{2\text{لا}}\ \frac{1}{\text{عف}^{2}}\ \text{جب لا} = -\,\text{و}^{2\text{لا}}\ \text{جب لا}$

امثلہ

۱- ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$\frac{1}{(\text{عف}-1)^{3}}\ \text{و}^{\text{لا}}\ \text{لا}^{2}$ ، $\frac{1}{(\text{عف}-1)^{2}}\ \text{و}^{\text{لا}}\ \text{جب لا}$ ، $\frac{1}{\text{عف}-1}\ \text{و}^{\text{لا}}\ \text{لوک لا}$

۲ - ثابت کرو کہ

$$\text{و}^{\text{ا لا}}\ \frac{1}{(\text{عف}+\text{ا}-1)(\text{عف}+\text{ا}-2)}\ \text{و}^{\text{ب لا}} = \text{و}^{\text{ب لا}}\ \frac{1}{(\text{عف}+\text{ب}-1)(\text{عف}+\text{ب}-2)}\ \text{و}^{\text{ا لا}}$$

۴۲ - عمل $\text{ف}\ (\text{عف}^{2})\ \frac{\text{جب}}{\text{جم}}\ \text{م لا}$

عف^{۲} جب/جم م لا = (-م^{۲}) جب/جم م لا

اور اس لئے عف^{۲ر} جب/جم م لا = (-م^{۲})^{ر} جب/جم م لا

اس لئے حسب سابق (دفعات ۳۹، ۴۱) معلوم ہوگا کہ

ف (عف^{۲}) جب/جم م لا = ف (-م^{۲}) جب/جم م لا

مثال $\int$ و^{لا} جب ب لا د لا = عف$^{-۱}$ و^{لا} جب ب لا = و^{لا} (عف + ا)$^{-۱}$ جب ب لا [دفعہ ۴۱]

$= $ و^{لا} $\frac{\text{ا - عف}}{\text{ا}^{۲}\text{ - عف}^{۲}}$ جب ب لا

$= \frac{\text{و}^{\text{لا}}}{\text{ا}^{۲}\text{ + ب}^{۲}}$ (ا - عف) جب ب لا [دفعہ ۴۲]

$= $ و^{لا} $\frac{\text{ا جب ب لا - ب جم ب لا}}{\text{ا}^{۲}\text{ + ب}^{۲}}$ = و^{لا} (ا^{۲} + ب^{۲})$^{-\frac{۱}{۲}}$ جب (ب لا - یس$^{-۱}$ $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$)

امثلہ

۱۔ اس طریقہ سے جملات ذیل کے تکملی معلوم کرو

و^{لا} جم ب لا، و^{لا} جب^{۲} لا، و^{لا} جب^{۳} لا، جبز لا جب لا

۲۔ ذیل کے عملوں کو پورا کرو۔

$\frac{۱}{\text{عف}^{۲}\text{ + ۲}}$ جب ۲ لا، $\frac{۱}{\text{عف}^{۲}\text{ + ۱}}$ جم لا، $\frac{\text{عف}^{۲}\text{ + ۱}}{\text{عف}^{۴}\text{ + ۱}}$ جب ۲ لا

۳۔ جیب اور جیب التمام کی قوت نمائی قیمتوں کے ذریعہ اعمال ف (عف) جم م لا، ف (عف) جب م لا کے نتائج حاصل کرو۔

۴۳ - عمل $\frac{1}{\text{ف}(\text{عف})}\ \frac{\text{جب}}{\text{جم}}\ \text{م لا}$

اب ہم عمل $\frac{1}{\text{ف}(\text{عف})}$ جب م لا پر غور کرینگے جہاں ف (ی) ایک ایسا تفاعل ی کا ہے کہ اسے ہم ی کی مثبت صحیح قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں۔

فرض کرو کہ ف (عف) کو عف کی قوتوں میں پھیلایا گیا ہے، اب اگر پھیلاؤ میں طاق قوتیں شریک نہ ہوں تو دفعہ ماقبل کے قاعدہ کی رو سے اوپر کے عمل کا نتیجہ فوراً حاصل ہو سکتا ہے۔

مثلاً $\frac{1}{1+\text{عف}^2+\text{عف}^4+\text{عف}^6}\ \text{جب}\ 2\ \text{لا} = \frac{1}{64-16+4-1}\ \text{جب}\ 2\ \text{لا} = -\frac{1}{51}\ \text{جب}\ 2\ \text{لا}$

لیکن اگر ہر دو طاق اور جفت قوتیں شریک ہوں تو اس طرح عمل ہو سکتا ہے، جفت قوتوں کو الگ اور طاق قوتوں کو الگ اکٹھا کرو اور عمل مذکور کو اس طرح لکھو

$$\frac{1}{\text{ف}(\text{عف})}\ \text{جب م لا} = \frac{1}{\text{فہ}(\text{عف}^2)+\text{عف}\ \text{فا}(\text{عف}^2)}\ \text{جب م لا}$$

$$= \frac{\text{فہ}(\text{عف}^2)-\text{عف}\ \text{فا}(\text{عف}^2)}{[\text{فہ}(\text{عف}^2)]^2-\text{عف}^2[\text{فا}(\text{عف}^2)]^2}\ \text{جب م لا}$$

$$= [\text{فہ}(\text{عف}^2)-\text{عف}\ \text{فا}(\text{عف}^2)]\ \frac{\text{جب م لا}}{[\text{فہ}(-\text{م}^2)]^2+\text{م}^2[\text{فا}(-\text{م}^2)]^2}$$

$$= \frac{\text{فہ}(-\text{م}^2)\ \text{جب م لا}-\text{م}\ \text{فا}(-\text{م}^2)\ \text{جم م لا}}{[\text{فہ}(-\text{م}^2)]^2+\text{م}^2[\text{فا}(-\text{م}^2)]^2}$$

بغور دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ عملی طور پر $\text{عف}^{۲}$ کی بجائے $-\text{م}^{۲}$ فوراً اس منزل $\frac{۱}{\text{فہ}(\text{عف}^{۲}) + \text{عف}\ \text{فا}(\text{عف}^{۲})}$ جب م لا کے بعد لکھ سکتے ہیں یعنی اوپر کے جملہ کی بجائے

$$\frac{۱}{\text{فہ}(-\text{م}^{۲}) + \text{عف}\ \text{فا}(-\text{م}^{۲})} \text{ جب م لا}$$

یا

$$\frac{\text{فہ}(-\text{م}^{۲}) - \text{عف}\ \text{فا}(-\text{م}^{۲})}{[\text{فہ}(-\text{م}^{۲})]^{۲} - \text{عف}^{۲}[\text{فا}(-\text{م}^{۲})]^{۲}} \text{ جب م لا وغیرہ}$$

فوراً لکھ سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ $\frac{۱}{\text{عف}^{۳} + \text{عف}^{۲} + \text{عف} + ۱}$ جب ۲ لا کی قیمت معلوم کرو۔

یہ ہے

$$\frac{۱}{\text{عف}^{۲} + ۱ + \text{عف}(\text{عف}^{۲} + ۱)} \text{ جب ۲ لا}$$

یا

$$\frac{۱}{-۳(۱ + \text{عف})} \text{ جب ۲ لا}$$

یا

$$\frac{\text{عف} - ۱}{-۳(\text{عف}^{۲} - ۱)} \text{ جب ۲ لا}$$

یا

$$(\text{عف} - ۱)\frac{\text{جب ۲ لا}}{۱۵}$$

یا

$$\frac{۲}{۱۵} \text{ جم ۲ لا} - \frac{۱}{۱۵} \text{ جب ۲ لا}$$

مثال ۲۔ $\frac{۱}{(\text{عف} - ۱)^{۳}}$ $\text{و}^{۲\text{لا}}$ جم لا کی قیمت حاصل کرو

یہ جملہ = $\text{و}^{2\text{لا}} \frac{1}{(\text{عف}+1)^3}$ جم لا

$= \text{و}^{2\text{لا}} \frac{1}{\text{عف}^3 + 3\,\text{عف}^2 + 3\,\text{عف} + 1}$ جم لا

$= \text{و}^{2\text{لا}} \frac{1}{-\text{عف} - 3 + 3\,\text{عف} + 1}$ جم لا [عف^2 کی بجائے ۱- لکھنے سے]

$= \frac{\text{و}^{2\text{لا}}}{2} \frac{1}{\text{عف} - 1}$ جم لا

$= \frac{\text{و}^{2\text{لا}}}{2} \frac{\text{عف} + 1}{\text{عف}^2 - 1}$ جم لا

$= \frac{\text{و}^{2\text{لا}}}{2} (\text{عف} + 1) \frac{\text{جم لا}}{-2} = -\frac{\text{و}^{2\text{لا}}}{4}$ (جم لا - جب لا)

امثلہ

۱۔ جملات ذیل پر مندرجہ ذیل عمل کرو۔

$\frac{\text{عف}}{\text{عف} - 1} \text{و}^{\text{لا}}$ جب لا ، $\frac{\text{عف}^3}{(\text{عف}-1)(\text{عف}-2)} \text{و}^{\text{لا}}$ جب لا لا

$\frac{1}{\text{عف} - 1} \text{و}^{\text{لا}}$ جب لا + $\frac{1}{\text{عف} + 1} \text{و}^{-\text{لا}}$ جب لا

۲۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{(\text{عف}+1)^{\text{ن}}} \text{و} = \text{و}^{-\text{لا}} \int\int\int \ldots \int \text{و}^{\text{لا}}\, \text{و}\, \text{د}\text{لا} \ldots \text{د}\text{لا}$ جہاں ن تکملی علامتیں ہیں۔

۳۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{\text{ف}(\text{ی})}$ کو جزوی کسروں میں تحلیل کرنے سے

عمل $\frac{1}{\text{ف}(\text{عف})}$ و معمولی تکملوں کے حاصل جمع کی صورت میں بیان ہو سکتا ہے۔

۴۴۔ عامل $\frac{1}{\text{ف}(\text{عف})}$ و جہاں و مقدار جبریہ ہے۔

اگر عمل $\frac{1}{\text{ف}(\text{عف})}$ و میں و متغیر لا کا ایک جبریہ، منطق، صحیح تفاعل ہو تو ہم $\frac{1}{\text{ف}(\text{عف})}$ کو کسی نہ کسی طریقہ سے عف کی صعودی قوتوں میں اس حد تک پھیلا سکتے ہیں کہ عف کا قوت نما و میں لا کی بڑی سے بڑی قوت کے مساوی ہو۔

مثال ۱۔ مثلاً معلوم کرو $\frac{1}{1+\text{عف}+\text{عف}^2}(\text{لا}^2+\text{لا}+1)$

یہ جملہ $= \frac{1-\text{عف}}{1-\text{عف}^3}(\text{لا}^2+\text{لا}+1)$

$= (1-\text{عف}+\text{عف}^3-\text{عف}^4+\dots)(\text{لا}^2+\text{لا}+1)$

$= (\text{لا}^2+\text{لا}+1)-(2\text{لا}+1) = \text{لا}^2-\text{لا}$

مثال ۲۔ نیز $\frac{1}{\text{عف}^3+3\text{عف}^2+7\text{عف}-1}\,\text{و}^{\text{لا}}\,\text{لا}^3$ کی قیمت دریافت کرو

جملہ $= \text{و}^{\text{لا}}\frac{1}{(\text{عف}+1)^3+3(\text{عف}+1)^2+7(\text{عف}+1)-1}\,\text{لا}^3$

$= \text{و}^{\text{لا}}\frac{1}{10+16\text{عف}+6\text{عف}^2+\text{عف}^3}\,\text{لا}^3$

$= \frac{\text{و}^{\text{لا}}}{10}\,\frac{1}{1+\frac{8}{5}\text{عف}+\frac{3}{5}\text{عف}^2+\frac{1}{10}\text{عف}^3}\,\text{لا}^3$

$$= \frac{\text{و}^{\text{لا}}}{۱۰}\left(۱ - \frac{۸}{۵}\,\text{عف} + \frac{۴۹}{۲۵}\,\text{عف}^{۲} - \frac{۵۶۹}{۲۵۰}\,\text{عف}^{۳} \ldots\right)\text{لا}^{۳}$$

$$= \frac{\text{و}^{\text{لا}}}{۱۰}\left(\text{لا}^{۳} - \frac{۸}{۵}\times ۳\,\text{لا}^{۲} + \frac{۴۹}{۲۵}\times ۶\,\text{لا} - \frac{۵۶۹}{۲۵۰}\times ۶\right)$$

امثلہ

ذیل کے عمل کرو۔

۱- $\frac{۱}{(\text{عف}+۱)(\text{عف}+۲)}\,\text{لا}^{۲}$ ، $\frac{۱}{\text{عف}(\text{عف}-۱)}\,\text{لا}$ ، $\frac{۱}{\text{عف}^{۲}(\text{عف}-۱)^{۲}}\,\text{لا}$

۲- $\frac{۱}{(\text{عف}+۱)(\text{عف}+۲)}\,\text{و}^{\text{لا}}\,\text{لا}^{۲}$ ، $\frac{۱}{\text{عف}(\text{عف}-۱)}\,\text{لا جمز لا}$

۳- $\frac{۱}{(\text{عف}-۱)}\,\text{لا جمز لا جم لا}$

۴۵- ایسی صورتیں جن میں یہ طریقے ناکام رہتے ہیں۔

خاص تکملی حاصل کرنے کے جو طریقے اوپر درج کئے گئے ہیں انہیں استعمال کرنے میں اکثر اوقات کئی صورتیں ایسی پیدا ہوتی ہیں جہاں یہ طریقے کامیاب نہیں ہو سکتے، اب ہم یہ بتانے کی کوشش کرتے ہیں کہ ایسی حالتوں میں طرز عمل کیا ہونا چاہئے۔

۴۶- مساوات $\frac{\text{ض ما}}{\text{ض لا}} - \text{ما} = \text{و}^{\text{لا}}$ کو حل کرو

متمم تفاعل ار $\text{و}^{\text{لا}}$ ہے۔

خاص تکملی حاصل کرنے کے لئے $\frac{۱}{\text{عف}-۱}\,\text{و}^{\text{لا}}$ کی قیمت معلوم ہونی چاہئے۔ اگر ہم دفعہ ۳۹ کا قاعدہ استعمال کریں تو حاصل ہوگا

$$\frac{\text{و}^{\text{لا}}}{۱-۱} \;\text{یا}\; \infty$$

اس مشکل سے بچنے کے لئے ہم دفعہ ۱۴ کا قاعدہ استعمال کرتے ہیں جس سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\text{عف}-1}\,\text{و}^{\text{لا}} = \text{و}^{\text{لا}}\,\frac{1}{\text{عف}}\,1 = \text{لا}\,\text{و}^{\text{لا}}$$

جو مطلوبہ خاص تکملی ہے۔

ایک اور طریقہ استعمال کرنے کی بجائے ہم عمل $\frac{1}{\text{عف}-1}\,\text{و}^{\text{لا}}$ کا بغور معائنہ کرتے ہیں۔

لا کی بجائے لا (۱ + ھ) لکھنے سے

$$\frac{1}{\text{عف}-1}\,\text{و}^{\text{لا}} = \text{ہا}_{\text{ھ}\to 0}\,\frac{1}{\text{عف}-1}\,\text{و}^{\text{لا}(1+\text{ھ})} = \text{ہا}_{\text{ھ}\to 0}\,\frac{1}{\text{ھ}}\,\text{و}^{\text{لا}}\,\text{و}^{\text{ھ}\text{لا}}$$

$$= \text{ہا}_{\text{ھ}\to 0}\,\frac{1}{\text{ھ}}\,\text{و}^{\text{لا}}\left(1+\text{ھ}\,\text{لا}+\frac{\text{ھ}^2\,\text{لا}^2}{\underline{|2}}+\frac{\text{ھ}^3\,\text{لا}^3}{\underline{|3}}+\cdots\right)$$

$$= \text{ہا}_{\text{ھ}\to 0}\left[\frac{\text{و}^{\text{لا}}}{\text{ھ}}+\text{لا}\,\text{و}^{\text{لا}}+\text{ھ}\,\text{و}^{\text{لا}}\left\{\frac{\text{لا}^2}{\underline{|2}}+\frac{\text{ھ}\,\text{لا}^3}{\underline{|3}}+\cdots\right\}\right]$$

اس جملہ میں سے حصہ $\text{ہا}\,\frac{\text{و}^{\text{لا}}}{\text{ھ}}$ لامتناہی ہو جاتا ہے لیکن اسے ہم متمم تفاعل ا $\text{و}^{\text{لا}}$ کے ساتھ لے سکتے ہیں اور چونکہ ا کی قیمت اختیاری ہے اس لئے ہم ا + $\frac{1}{\text{ھ}}$ کو ایک نیا اختیاری مستقل ب تصور کرتے ہیں کیونکہ ا کا ایک حصہ منفی اور غیر متناہی فرض کیا جا سکتا ہے جو رقم $\frac{1}{\text{ھ}}$ کا توازن کر دے گا۔

پس لا $\text{و}^{\text{لا}}$ مطلوبہ خاص تکملی ہے۔

باقی رقموں میں ھ شریک ہوتا ہے جو ھ کے لاانتہا کم ہونے سے معدوم ہو جاتی ہیں۔

پس مساوات کا پورا حل ما = ا $\text{و}^{\text{لا}}$ + لا $\text{و}^{\text{لا}}$ ہے۔

مثال ۲۔ مساوات $\frac{\text{و}^{2}\,\text{ما}}{\text{و لا}^{2}} + ۴\,\text{ما} = \text{و}^{\text{لا}} + \text{جب}\ ۲\,\text{لا}$ کو حل کرو

متمم تفاعل صریحاً یہ ہے ما = ا جب ۲ لا + ب جم ۲ لا

خاص تکملی کے دو حصے ہیں $\frac{۱}{\text{عف}^{2}+۴}\,\text{و}^{\text{لا}}$ یا $\frac{۱}{۵}\,\text{و}^{\text{لا}}$ اور $\frac{۱}{\text{عف}^{2}+۴}$ جب ۲ لا

دوسرے حصہ میں اگر دفعہ ۲۴ کا قاعدہ استعمال کیا جائے تو حاصل ہوگا

$\frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{صفر}}$ یعنی ∞، پس یہ قاعدہ ناکام رہے گا۔

اب ہم $\frac{۱}{\text{عف}^{2}+۴}$ جب ۲ لا (۱ + ھ) کی انتہا معلوم کرتے ہیں جبکہ ھ = ۰

$$\text{یہ جملہ} = \frac{۱}{۴}\ \frac{۱}{۱-(۱+\text{ھ})^{2}}\ \text{جب}(۲\,\text{لا} + ۲\,\text{ھ لا})$$

$$= \frac{۱}{۴}\ \frac{۱}{-۲\text{ھ}-\text{ھ}^{2}}\ (\text{جب ۲ لا جم ۲ ھ لا} + \text{جم ۲ لا جب ۲ ھ لا})$$

$$= -\frac{۱}{۸}\ \frac{۱}{\text{ھ}+\frac{\text{ھ}^{2}}{۲}}\left[\text{جب ۲ لا}\left(۱-\frac{۴\,\text{ھ}^{2}\,\text{لا}^{2}}{۲}+\ldots\right)+\text{جم ۲ لا}(۲\,\text{ھ لا}-\ldots)\right]$$

$$= -\frac{۱}{۸}\ \frac{\text{جب ۲ لا}}{\text{ھ}} - \frac{۱}{۴}\ \text{لا جم ۲ لا} + \text{ھ کی قوتیں}$$

= (ایک ایسی رقم جو متمم تفاعل میں شریک کردی جاسکتی ہے) $-\ \frac{\text{لا جم ۲ لا}}{۴}$ + (رقمیں جو ھ کے ساتھ معدوم ہو جاتی ہیں)

پس تفرقی مساوات کا پورا حل ہے

$$\text{ما} = \text{ا جب ۲ لا} + \text{ب جم ۲ لا} + \frac{۱}{۵}\,\text{و}^{\text{لا}} - \frac{\text{لا جم ۲ لا}}{۴}$$

مثال ۳ـ مساوات $(\text{عف}^{2}+3\,\text{عف})(\text{عف}-1)^{2}\,\text{ما}=\text{قو}^{\text{لا}}+\text{قو}^{2\text{لا}}+\text{جیب لا}+\text{لا}^{2}$
کو حل کرو۔

اس صورت میں متمم تفاعل صریحاً $\text{ا}_1+\text{ا}_2\,\text{قو}^{-3\text{لا}}+(\text{ا}_3+\text{ا}_4\,\text{لا})\,\text{قو}^{\text{لا}}$ ہے۔
خاص تکملی کے چار حصے ہیں یعنی

$$\frac{1}{(\text{عف}^{2}+3\,\text{عف})(\text{عف}-1)^{2}}\,\text{قو}^{\text{لا}}=\frac{1}{(\text{عف}-1)^{2}}\,\frac{\text{قو}^{\text{لا}}}{4}=\frac{\text{قو}^{\text{لا}}}{4}\times\frac{1}{\text{عف}^{2}}\times 1=\frac{\text{لا}^{2}\,\text{قو}^{\text{لا}}}{8}$$

[یا ملاحظہ ہو $\frac{1}{(\text{عف}-1)^{2}}\,\frac{\text{قو}^{(1+\text{ھ})\text{لا}}}{4}=\frac{1}{4\,\text{ھ}^{2}}\,\text{قو}^{\text{لا}}\left(1+\text{ھ لا}+\frac{\text{ھ}^{2}\text{لا}^{2}}{\lfloor 2}+\cdots\right)$

= (ایک حصہ جو متمم تفاعل میں چلا جاتا ہے)
$+\frac{\text{لا}^{2}}{8}\,\text{قو}^{\text{لا}}+$ (ایسی رقمیں جو ھ کے ساتھ معدوم ہوجاتی ہیں)]

$$\frac{1}{(\text{عف}^{2}+3\,\text{عف})(\text{عف}-1)^{2}}\,\text{قو}^{2\text{لا}}=\frac{1}{10}\,\text{قو}^{2\text{لا}}$$

$$\frac{1}{(\text{عف}^{2}+3\,\text{عف})(\text{عف}-1)^{2}}\,\text{جیب لا}=\frac{1}{(-1+3\,\text{عف})(-2\,\text{عف})}\,\text{جیب لا}=$$

$$=\frac{1}{-6\,\text{عف}^{2}+2\,\text{عف}}\,\text{جیب لا}=\frac{1}{6+2\,\text{عف}}\,\text{جیب لا}=\frac{3-\text{عف}}{2(9-\text{عف}^{2})}\,\text{جیب لا}$$

$$=(3\,\text{جیب لا}-\text{جم لا})/20$$

اور اخیر میں

$$\frac{1}{(\text{عف}^{2}+3\,\text{عف})(\text{عف}-1)^{2}}\,\text{لا}^{2}=\frac{1}{3\,\text{عف}}\left(1+\frac{\text{عف}}{3}\right)^{-1}(1+2\,\text{عف}+3\,\text{عف}^{2}+\cdots)\,\text{لا}^{2}$$

$$=\frac{1}{3\,\text{عف}}\left(1+\frac{\text{عف}}{3}\right)^{-1}(\text{لا}^{2}+4\,\text{لا}+6)\ \text{۔}$$

$$= \frac{۱}{۳\,\text{عف}}\left(۱ - \frac{\text{عف}}{۳} + \frac{\text{عف}^{۲}}{۹} - \dots\right)\left(\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{لا} + ۶\right)$$

$$= \frac{۱}{۳\,\text{عف}}\left(\text{لا}^{۲} + ۴\,\text{لا} + ۶ - \frac{۲}{۳}\,\text{لا} - \frac{۴}{۳} + \frac{۲}{۹}\right)$$

$$= \frac{۱}{۳\,\text{عف}}\left(\text{لا}^{۲} + \frac{۱۰}{۳}\,\text{لا} + \frac{۴۴}{۹}\right)$$

$$= \frac{۱}{۳}\left(\frac{\text{لا}^{۳}}{۳} + \frac{۵}{۳}\,\text{لا}^{۲} + \frac{۴۴}{۹}\,\text{لا}\right)$$

اس لئے پورا حل ہے

$$\text{م} = \text{ا}_{۱} + \text{ا}_{۲}\,\text{و}^{-۳\text{لا}} + \left(\text{ا}_{۳} + \text{ا}_{۴}\,\text{لا}\right)\text{و}^{\text{لا}}$$

$$+ \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{و}^{\text{لا}}}{۸} + \frac{\text{و}^{۲\text{لا}}}{۱۰} + \frac{۳\,\text{جب لا} - \text{جم لا}}{۲۰} + \frac{\text{لا}^{۳}}{۹} + \frac{۵\,\text{لا}^{۲}}{۹} + \frac{۴۴}{۲۷}$$

مثال ۴ ۔ مساوات $\frac{\text{د}^{۲}\text{م}}{\text{دلا}^{۲}} - \text{م} = \text{لا جب لا}$ کو حل کرو

متمم تفاعل (م، ت) ہے $\text{ا}_{۱}\,\text{جبز لا} + \text{ا}_{۲}\,\text{جمز لا} + \text{ا}_{۳}\,\text{جب لا} + \text{ا}_{۴}\,\text{جم لا}$

(خاص تکملی) (خ، ک) ہے $\frac{۱}{\text{عف}^{۴} - ۱}$ لا جب لا جو خم کا سر ہے

$$\frac{۱}{\text{عف}^{۴} - ۱}\,\text{لا}\,\text{و}^{\text{خم لا}} \text{ میں}$$

$$\text{یعنی } \text{و}^{\text{خم لا}}\,\frac{۱}{(\text{عف} + \text{خم})^{۴} - ۱}\,\text{لا} \text{ میں}$$

$$\text{یعنی } \text{و}^{\text{خم لا}}\,\frac{۱}{-۴\,\text{خم}\,\text{عف} - ۶\,\text{عف}^{۲} \dots}\,\text{لا} \text{ میں}$$

یعنی $\text{و}^{\text{خلا}} \frac{1}{1 - \frac{3}{2}\text{خ عف} - 4\text{خ عف}\ldots}$ لا میں

یعنی $\text{و}^{\text{خلا}} \frac{\text{خ}}{4} \frac{1}{\text{عف}} \left(\text{لا} + \frac{3}{2}\text{خ}\right)$ میں

یعنی $\text{و}^{\text{خلا}} \left(\frac{\text{خ لا}^2}{8} - \frac{3}{8}\text{لا}\right)$ میں

پس خاص تکملی ہے $\frac{\text{لا}^2 \text{جم لا}}{8} - \frac{3}{8} \text{لا جب لا}$

اور پورا حل ہے

$$\text{ما} = \text{ا}_1 \text{ جبز لا} + \text{ا}_2 \text{ جمز لا} + \text{ا}_3 \text{ جب لا} + \text{ا}_4 \text{ جم لا} + \frac{\text{لا}^2 \text{جم لا}}{8} - \frac{3}{8} \text{لا جب لا}$$

امثلہ

۱۔ مندرجہ ذیل کے خاص تکملی حاصل کرو

(۱) $\frac{1}{\text{عف}^2 + 1} \text{جب لا}$ (۲) $\frac{1}{\text{عف}^2 + 4} \text{جم ۲ لا}$

(۳) $\frac{1}{\text{عف}^2 - 1} \text{جبز لا}$ (۴) $\frac{1}{\text{عف}^2 - 1} \text{و}^{\text{لا}} \text{لا}$

(۵) $\frac{1}{(\text{عف} - 1)(\text{عف} - 2)(\text{عف} - 3)} \text{و}^{\text{لا}}$ (۶) $\frac{1}{\text{عف}^2 - 1} (\text{جبز لا} + \text{جب لا})$

(۷) $\frac{1}{(\text{عف}^2 - \text{ا}^2)(\text{عف}^2 - \text{ب}^2)} (\text{و}^{\text{الا}} + \text{جمز ب لا})$

(۸) $\frac{1}{(\text{عف}^2 + 1)(\text{عف}^2 + 4)} \text{جم} \frac{\text{لا}}{2} \text{جم} \frac{3\text{لا}}{2}$

۲۔ ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) $\frac{\text{ف}^{2}\text{ما}}{\text{ف لا}^{2}} - \text{ما} = \text{و}^{2\text{لا}}$ (۲) $\frac{\text{ف}^{2}\text{ما}}{\text{ف لا}^{2}} - \text{ما} = \text{جمز لا}$

(۳) $\frac{\text{ف}^{2}\text{ما}}{\text{ف لا}^{2}} + \text{ما} = \text{و}^{-\text{لا}} + \text{جم لا} + \text{لا}^{3} + \text{و}^{\text{لا}}\,\text{جب لا}$

(۴) $(\text{عف}^{2} - 1)(\text{عف}^{3} - 1)\,\text{ما} = \text{لا}\,\text{و}^{\text{لا}}$

(۵) $(\text{عف} - 1)(\text{عف} + 1)\,\text{عف}^{2}\,\text{ما} = \text{لا}$

(۶) $(\text{عف}^{3} - 3\,\text{عف}^{2} - 3\,\text{عف} + 1)\,\text{ما} = \text{و}^{-\text{لا}} + \text{لا}$

(۷) $(\text{عف}^{3} - 1)\,\text{ما} = \text{لا جب لا}$

(۸) $(\text{عف}^{2} - 1)\,\text{ما} = \text{لا}\,\text{و}^{\text{لا}}\,\text{جب لا}$

(۹) $(\text{عف}^{2} - 1)\,\text{ما} = \text{جمز لا جم لا} + \text{ا}^{\text{لا}}$

(۱۰) $(\text{عف} - 1)^{2}(\text{عف}^{2} + 1)^{2}\,\text{ما} = \text{جب}^{2}\frac{\text{لا}}{2} + \text{و}^{\text{لا}} + \text{لا}$

۴۷ - عامل $\text{لا}\frac{\text{ف}}{\text{ف لا}}$

اس قسم کی مساوات

$$\text{لا}^{\text{ن}}\frac{\text{ف}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{ف لا}^{\text{ن}}} + \text{ا}_{1}\text{لا}^{\text{ن}-1}\frac{\text{ف}^{\text{ن}-1}\text{ما}}{\text{ف لا}^{\text{ن}-1}} + \text{ا}_{2}\text{لا}^{\text{ن}-2}\frac{\text{ف}^{\text{ن}-2}\text{ما}}{\text{ف لا}^{\text{ن}-2}} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{ن}}\text{ما} = \text{و}$$

کو جس میں ا_{1}، ا_{2}، ... $\text{ا}_{\text{ن}}$ مستقل ہیں مناسب طریق پر تبدیل کرنے سے ایسی شکل میں لاسکتے ہیں جس میں تمام سر مستقل ہو جائیں۔ یہ تبدیلی $\text{لا} = \text{و}^{\text{ت}}$ رکھنے سے وقوع پذیر ہوتی ہے۔

اس صورت میں $\frac{\text{ف لا}}{\text{ف ت}} = \text{و}^{\text{ت}}$ اور اس لئے $\text{لا}\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}} = \frac{\text{ف ما}}{\text{ف ت}}$

ظاہر ہے کہ عامل $\text{لا}\frac{\text{ف}}{\text{ف لا}}$ اور $\frac{\text{ف}}{\text{ف ت}}$ ایک دوسرے کے معادل ہیں

فرض کرو کہ $\frac{فر}{فرت}$ کی بجائے ہم عف لکھتے ہیں، اس طرح سے حاصل ہوگا

$$لا \frac{فر}{فرلا}\left(لا^{ن-۱} \frac{فر^{ن-۱} ما}{فرلا^{ن-۱}}\right) = لا^{ن} \frac{فر^{ن} ما}{فرلا^{ن}} + (ن-۱) لا^{ن-۱} \frac{فر^{ن-۱} ما}{فرلا^{ن-۱}}$$

$$یا\quad لا^{ن} \frac{فر^{ن} ما}{فرلا^{ن}} = \left(لا \frac{فر}{فرلا} - ن + ۱\right) لا^{ن-۱} \frac{فر^{ن-۱} ما}{فرلا^{ن-۱}}$$

$$= (عف - ن + ۱)\, لا^{ن-۱} \frac{فر^{ن-۱} ما}{فرلا^{ن-۱}}$$

اب ن کو بالتواتر ۲، ۳، ۴، ..... کے مساوی رکھنے سے

$$لا^{۲} \frac{فر^{۲} ما}{فرلا^{۲}} = (عف - ۱)\, لا \frac{فر ما}{فرلا} = (عف - ۱)\, عف\, ما$$

$$لا^{۳} \frac{فر^{۳} ما}{فرلا^{۳}} = (عف - ۲)\, لا^{۲} \frac{فر^{۲} ما}{فرلا^{۲}} = (عف - ۲)(عف - ۱)\, عف\, ما$$ وغیرہ

اس لئے عام طور پر

$$لا^{ن} \frac{فر^{ن} ما}{فرلا^{ن}} = (عف - ن + ۱)(عف - ن + ۲) \dots (عف - ۱)\, عف\, ما$$

یا ان عملوں کی ترتیب الٹنے سے

$$عف\,(عف - ۱)(عف - ۲) \dots (عف - ن + ۱)\, ما$$

مثال۔ ذیل کی تفرقی مساوات کو حل کرو

$$لا^{۳} \frac{فر^{۳} ما}{فرلا^{۳}} + ۲لا^{۲} \frac{فر^{۲} ما}{فرلا^{۲}} + ۳\, لا \frac{فر ما}{فرلا} - ۳ما = لا^{۲} + لا$$

رکھو $لا = و^{ت}$، اس طرح مساوات ہو جاتی ہے

$$عف(عف - ۱)(عف - ۲)ما + ۲عف(عف - ۱)ما + ۳عف\, ما - ۳ما = و^{۲ت} + و^{ت}$$

یا (عف۳ - عف۲ + ۳ عف - ۳) ما = و۲ت + وت

یعنی (عف - ۱) (عف۲ + ۳) ما = و۲ت + وت

جس سے حاصل ہوتا ہے

ما = ا وت + ب جم ت √۳ + ج جب ت √۳ + و۲ت / ۷ + ت وت / ۴

یا ما = ا لا + ب جم (√۳ لوک لا) + ج جب (√۳ لوک لا) + لا۲ / ۷ + لا لوک لا / ۴

امثلہ

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو

۱۔ لا۲ ور۲ ما / ور لا۲ + لا ور ما / ور لا + ق۲ ما = ۰

۲۔ لا۲ ور۲ ما / ور لا۲ + لا ور ما / ور لا + ق۲ ما = (لوک لا)۲ + لا جب لوک لا + جب ق لوک لا

۳۔ لا۳ ور۳ ما / ور لا۳ + ۳ لا۲ ور۲ ما / ور لا۲ + لا ور ما / ور لا + ما = لا + لوک لا

۴۔ لا۳ ور۳ ما / ور لا۳ + ۲ لا۲ ور۲ ما / ور لا۲ - لا ور ما / ور لا + ما = لا + لا۳

۵۔ (ا + ب لا)۲ ور۲ ما / ور لا۲ + ب (ا + ب لا) ور ما / ور لا + ق۲ ما = ۰

باب پنجم

قائم مرمیات، متفرق مساواتیں

قائم مرمی

۴۸۔ کاربنری مساواتیں۔ مساوات ف (لا، ما، ا) = ۰ منحنیات کے ایک قبیل کو تعبیر کرتی ہے، اب سوال زیر بحث یہ ہے کہ اگر منحنیات کے ایک قبیل کی مساوات دی ہوئی ہو تو ہم ایک ایسے قبیل منحنیات کی مساوات معلوم کریں جس کا ہر ایک رکن پہلے قبیل کے ہر ایک رکن کو علی القوائم قطع کرے۔ جیسا پہلے بتایا گیا ہے ایسے* سوالات میں ضروری ہے کہ پہلے قبیل کے تمام رکنوں پر ایک ساتھ عمل کیا جائے، اس لحاظ سے مخصوص کرنے والا مستقل ا اس قبیل کی مساوات میں شریک نہیں ہونا چاہئے، دفعہ ۲ میں بتایا گیا ہے کہ ا ذیل کی دو مساواتوں کے ذریعہ ساقط ہو سکتا ہے

ف (لا، ما، ا) = ۰

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \times \frac{\text{د ما}}{\text{د لا}} = ۰$$

فرض کرو کہ یہ حاصل اسقاط فہ $\left(\text{لا، ما، } \frac{\text{د ما}}{\text{د لا}}\right) = ۰$

ہے پس یہ پہلے قبیل کی تفرقی مساوات ہے۔

اب جہاں پہلے نظام کا ایک رکن دوسرے نظام کے ایک رکن کو

قطع کرتا ہے اُس نقطہ پر ان دو منحنیات کے مماس علی القوائم ہیں۔
پس اگر اس نقطۂ تقاطع کے رواں محدد بلحاظ دوسرے قبیل کے منحنی کے ضا، عا اور اگر اسی نقطہ کو پہلے قبیل کے مذکورہ منحنی پر خیال کیا جائے اور اس کے لحاظ سے اس کے رواں محدد لا، ما ہوں تو

$$\text{ضا} = \text{لا}،\ \text{عا} = \text{ما}،\ \frac{\text{فر عا}}{\text{فر ضا}} = - \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}$$

اس لئے دوسرے قبیل کی تفرقی مساوات ہوگی

$$\text{ہ} \left(\text{ضا}،\ \text{عا}،\ - \frac{\text{فر ضا}}{\text{فر عا}} \right) = 0$$

اور اس کو تکمل کرنے سے پہلے نظام کے قائم مرمیات کا قبیل حاصل ہوگا۔
اس لئے قاعدہ یہ ہے۔
مساوات معلومہ کو تفرق کرو اور مستقل کو ساقط کرو، پھر $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی بجائے $- \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}$ لکھو اور تفرقی مساوات کو تکمل کرو۔

۴۹۔ قطبی مساواتیں۔ اگر منحنی کی مساوات قطبی محددوں میں دی ہوئی ہو تو وہ زاویہ جو سمتی نیم قطر مماس کے ساتھ بناتا ہے $\text{ر} \frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ر}}$ ہوگا، اس صورت میں قاعدہ مذکورہ یہ ہوگا۔

مساوات کو تفرق کرو اور مستقل کو ساقط کرو، پھر $\text{ر} \frac{\text{فر طہ}}{\text{فر ر}}$ کی بجائے $- \frac{1}{\text{ر}} \frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}$ لکھ کر نئی تفرقی مساوات کو تکمل کرو۔

۵۰۔ دائروں کے قبیل $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 2\ \text{ر}\ \text{لا}$ .... (۱)
کا ہر رکن محور ما کو مبدأ پر مس کرتا ہے، اس قبیل کے قائم مرمیات

کا نظام معلوم کرو۔

یہاں $\text{لا} + \text{ما} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ر}$

اور ر کو ساقط کرنے سے $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = ۲\,\text{لا} \left(\text{لا} + \text{ما} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)$

یعنی $\text{لا}^2 + ۲\,\text{لا}\,\text{ما} \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{ما}^2 = ۰$ .... (۲)

اس لئے نئی تفرقی مساوات ہوگی

$$\text{لا}^2 - ۲\,\text{لا}\,\text{ما} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} - \text{ما}^2 = ۰$$

یا $\text{ما}^2 + ۲\,\text{لا}\,\text{ما} \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} - \text{لا}^2 = ۰$

جو ایک متجانس مساوات ہے اور اس میں ما = و لا رکھنے سے اس کے متغیر الگ ہو سکتے ہیں۔
مگر چونکہ اس مساوات اور مساوات (۲) میں صرف اتنا فرق ہے کہ لا، ما کا باہم تبادلہ کر دیا گیا ہے اس لئے اس کا تکملی ہوگا

$$\text{ما}^2 + \text{لا}^2 = ۲\,\text{ب}\,\text{ما}$$

جو دائروں کا ایک اور نظام ہے جس کا ہر ایک رکن محور لا کو مبدأ پر مس کرتا ہے۔

مثال ۲۔ منحنیات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2 + \text{لہ}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2 + \text{لہ}} = ۱$ .... (۱)

کے قائم مرمیات کا نظام معلوم کرو جہاں لہ اس قبیل کا متبدل ہے۔

یہاں $\frac{\text{لا}}{\text{ا}^2 + \text{لہ}} + \frac{\text{ما}\,\text{ما}_۱}{\text{ب}^2 + \text{لہ}} = ۰$ .... (۲)

اور ان دو مساواتوں سے لہ کو ساقط کرنا چاہئے۔

(۲) سے حاصل ہوتا ہے $\text{لا}\,(\text{ب}^2 + \text{لہ}) + \text{ما}\,\text{ما}_1\,(\text{ا}^2 + \text{لہ}) = 0$

یا $\text{لہ} = -\dfrac{\text{ب}^2\,\text{لا} + \text{ا}^2\,\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{لا} + \text{ما}\,\text{ما}_1}$

پس $\text{ا}^2 + \text{لہ} = \dfrac{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{لا}}{\text{لا} + \text{ما}\,\text{ما}_1}$

اور $\text{ب}^2 + \text{لہ} = -\dfrac{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{ما}\,\text{ما}_1}{\text{لا} + \text{ما}\,\text{ما}_1}$

پس اس قبیل کی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}^2\,(\text{لا} + \text{ما}\,\text{ما}_1)}{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{لا}} - \frac{\text{ما}^2\,(\text{لا} + \text{ما}\,\text{ما}_1)}{(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)\,\text{ما}\,\text{ما}_1} = 1$$

یا $\text{لا}^2 - \text{ما}^2 + \text{لا}\,\text{ما}\left(\text{ما}_1 - \dfrac{1}{\text{ما}_1}\right) = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$ .... (۳)

اس لئے ما_1 کی بجائے $-\dfrac{1}{\text{ما}_1}$ لکھنے سے مطلوبہ مرمیات کے قبیل کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے

$\text{لا}^2 - \text{ما}^2 + \text{لا}\,\text{ما}\left(-\dfrac{1}{\text{ما}_1} + \text{ما}_1\right) = \text{ا}^2 - \text{ب}^2$ .... (۴)

لیکن چونکہ اس میں اور مساوات (۳) میں کوئی فرق نہیں ہے، اس لئے اس کا تکملہ بھی وہی ہوگا

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2 + \text{مہ}} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2 + \text{مہ}} = 1$$

جو ایسی مخروطی تراشوں کا ایک نظام ہے جو پہلے نظام کے ساتھ ہم ماسکہ ہیں۔

مثال نمبر ۲۔ ر کی مختلف قیمتوں کے لئے صنوبری خطوط کے قبیل

$\text{ر} = \text{ا}\,(1 - \text{جم}\,\text{طہ})$ کے قائم مرمیات کا نظام معلوم کرو۔

یہاں $\frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}}$ = رجب طہ

اور رکو ساقط کرنے سے

$$\text{ر}\frac{\text{فرطہ}}{\text{فرر}} = \frac{\text{ا}-\text{جم طہ}}{\text{جب طہ}} = \text{مس}\,\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}$$

اس لئے قائم مرمیات کے قبیل کے لئے

$$-\frac{\text{ا}}{\text{ر}}\,\frac{\text{فرر}}{\text{فرطہ}} = \text{مس}\,\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}$$

یا لوک ر = ۲ لوک جم $\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}$ + مستقل

یا ر = ب (ا + جم طہ)

جو ہم محور صنوبری خطوط کا ایک اور قبیل ہے جن کے قرنوں کا رخ متقابل سمت میں ہے۔

امثلہ

۱۔ ا کی مختلف قیمتوں کے لئے مکافیات ما^{۲} = ۴ ا لا کے قائم مرمیات کا نظام معلوم کرو۔

۲۔ ثابت کرو کہ م کی مختلف قیمتوں کے لئے متشابہ ناقصوں کے قبیل $\frac{\text{لا}^{۲}}{\text{ا}^{۲}} + \frac{\text{ما}^{۲}}{\text{ب}^{۲}}$ = م^{۲} کے قائم مرمیات کا نظام لا$^{\text{ب}^{۲}}$ = ا ما$^{\text{ا}^{۲}}$ ہے۔

۳۔ ا کی مختلف قیمتوں کے لئے مساوی الزاویہ لولبیوں کے قبیل ر = ا و$^{\text{طہ م عہ}}$ کے قائم مرمیات معلوم کرو۔

۴۔ ا کی مختلف قیمتوں کے لئے ہم محور اور ہم ماسکہ مکافیوں $\frac{\text{۲ ا}}{\text{ر}}$ = ا + جم طہ کے قائم مرمیات کا قبیل معلوم کرو۔

۵۔ ثابت کرو کہ منحنیات کے قبیل

$$\left.\begin{array}{l} لا^3 - ۳ لا ما^2 = ا \\ ۳ لا^2 ما - ما^3 = ب \end{array}\right\}$$

علی القوائم ہیں۔

۶۔ ثابت کرو کہ منحنیات $ر جب^2 عہ = ا (جم طہ - جم عہ)$
اور $ر جبنز^2 یہ = ا (جمز یہ - جم طہ)$
علی القوائم ہیں۔

۷۔ اگر $ف (لا + خ ما) = ی + خ و$ تو ثابت کرو کہ
$ی = ا$ اور $و = ب$
قائم منحنیات کے دو نظام ہیں۔

۸۔ ثابت کرو کہ مہ کی کسی مستقل قیمت کے لئے منحنیات کا قبیل
$جمنز لا قم ما - مہ جم ما =$ مستقل
قبیل $مہ ممز لا - قمز لا جم ما =$ مستقل کے منحنیات کو علی القوائم قطع کرتا ہے۔ [لنڈن ۱۸۹۰ء]

علم حرکت کی چند مشہور مساواتیں

۵۱ ۔ مساوات $\frac{ق^2 ی}{ق طہ^2} + ی = فَ (ی)$

ایک ایسے ذرہ کی حرکت کی عام مساوات ہے جو ایک مرکزی قوت کے زیر اثر حرکت کر رہا ہو۔

$۲ \frac{ق ی}{ق طہ}$ کے ساتھ ضرب دینے اور تکمل کرنے سے

$$\left(\frac{ق ی}{ق طہ} \right)^2 + ی^2 = ۲ ف (ی) + ا$$

جسے ہم اس طرح لکھ سکتے ہیں $\int \frac{\text{فری}}{\text{ا}+\text{۲ف(ی)}-\text{ی}^2} = \text{طہ}+\text{ب}$

اس طرح حل عمل میں آسکتا ہے۔

۵۲ ـ $\frac{\text{ف}^2\text{ی}}{\text{فرطہ}^2} + \text{ن}^2\text{ی} = \text{ف(طہ)}$ مستقل سروں والی ایک خطی مساوات ہے، ایسی مساواتوں پر پہلے بحث ہو چکی ہے ان کا حل اس طرح بھی عمل میں آسکتا ہے۔

جب ن طہ کے ساتھ ضرب دو جو متکمل جزوِ ضربی ہے تکمل کرنے سے

$$\text{جب ن طہ}\frac{\text{فری}}{\text{فرطہ}} - \text{ن ی جم ن طہ} = \int^{\text{طہ}} \text{ف(طَہ) جب ن طَہ فرطَہ} + \text{ا}$$

اسی طرح جم ن طہ متکمل جزوِ ضربی ہے اور اس کے جواب میں پہلا تکملی

$$\text{جم ن طہ}\frac{\text{فری}}{\text{فرطہ}} + \text{ن ی جب ن طہ} = \int^{\text{طہ}} \text{ف(طَہ) جم ن طَہ فرطَہ} + \text{بَ}$$

$\frac{\text{فری}}{\text{فرطہ}}$ کو ساقط کرنے سے

$$\text{ن ی} = \int^{\text{طہ}} \text{ف(طَہ) جب ن (طہ - طَہ) فرطَہ} + \text{ب جب ن طہ}$$
$$- \text{ا جم ن طہ}$$

۵۳ ـ ایک ایسے جسم کی مساواتِ حرکت جس کی کمیت بدلتی ہو اکثر یہ صورت اختیار کرتی ہے

$$\frac{\text{ف}}{\text{فرت}}\left\{\text{فہ (لا)}\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}\right\} = \text{سا (لا)}$$

اور اس کا متکمل جزو ضربی فہ (لا) فرلا/فرت ہے۔

کیونکہ فہ (لا) فرلا/فرت فر/فرت {فہ (لا) فرلا/فرت} = سا (لا) فہ (لا) فرلا/فرت

جس سے حاصل ہوتا ہے ۱/۲ {فہ (لا) فرلا/فرت}^۲ = ∫ سا (لا) فہ (لا) فرلا + ا

یا ۱/√۲ ∫ فہ (لا) فرلا / √(∫ سا (لا) فہ (لا) فرلا + ا) = فرت

متغیر جدا ہو گئے ہیں، پس حل مطلوب حاصل ہو سکتا ہے۔

مزید توضیحی مثالیں

۵۴۔ کئی مساواتوں کو خاص ترکیبوں سے اوپر کی کسی نہ کسی معیاری صورت میں تحویل کرنے سے حل کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۔ فرما/فرلا = ف (ا لا + ب ما)

فرض کرو کہ ا لا + ب ما = ی

تب ا + ب فرما/فرلا = فری/فرلا

پس ا + ب ف (ی) = فری/فرلا

اور فرلا = فری / (ا + ب ف (ی))

یا لا + ج = ∫ فری / (ا + ب ف (ی))

مثال ۲- $لا^{۲} \frac{فرما}{فرلا} \left(ما + لا \frac{فرما}{فرلا} \right) + ۱ = ۰$

رکھو $لا\, ما = ی$

$$تب \quad ما + لا \frac{فرما}{فرلا} = \frac{فری}{فرلا}$$

$$\therefore لا \left(\frac{فری}{فرلا} - ما \right) \frac{فری}{فرلا} + ۱ = ۰$$

$$یا \quad ی = لا \frac{فری}{فرلا} + \frac{۱}{\frac{فری}{فرلا}}$$

جو کلیروی شکل کی مساوات ہے اور اسی کا کامل ابتدائی ہے

$$لا\, ما = لاج + \frac{۱}{ج}$$

مثال ۳- $و^{۲(لا+ما)} \left(۱ - \frac{فرما}{فرلا} \right)^{۲} = و^{۲لا} + و^{۲ما} \left(\frac{فرما}{فرلا} \right)^{۲}$ کو حل کرو

فرض کرو کہ $و^{ما} = عا$ اور $و^{لا} = ضا$

اب چونکہ یہ مساوات اس طرح لکھی جا سکتی ہے

$$\left(و^{ما} - و^{ما} \frac{فرما}{فرلا} \right)^{۲} = ۱ + \left(\frac{و^{ما}\, فرما}{و^{لا}\, فرلا} \right)^{۲}$$

اس لئے اسے ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$$عا - ضا \frac{فرعا}{فرضا} = \sqrt{۱ + \left(\frac{فرعا}{فرضا} \right)^{۲}}$$

جو کلیروی شکل کی مساوات ہے، اس لئے اس کا کامل ابتدائی ہے

$$عا = ج\, ضا + \sqrt{۱ + ج^{۲}}$$

$$یا \quad و^{ما} = ج\, و^{لا} + \sqrt{۱ + ج^{۲}}$$

مثال ۴۔ ا لا ما (د ما / د لا)^۲ + (لا^۲ - ا ما^۲ - ب) (د ما / د لا) - لا ما = ۰

(ہندسۂ مجسمات میں یہ مساوات اکثر واقع ہوتی ہے)

اس میں رکھو لا = √س اور ما = √ت

مساوات مفروضہ ہو جاتی ہے

ا √س √ت (√س د ت / √ت د س)^۲ + (س - ا ت - ب) (√س د ت / √ت د س) - √س √ت = ۰

یا ا س (د ت / د س)^۲ + (س - ا ت - ب) (د ت / د س) - ت = ۰

یعنی ت (۱ + ا د ت / د س) = س (د ت / د س) (۱ + ا د ت / د س) - ب (د ت / د س)

جس سے حاصل ہوتا ہے ت = س (د ت / د س) - ب (د ت / د س) / (۱ + ا د ت / د س)

جو کلیرو کی شکل ہے، اس کا کامل ابتدائی ہے

ت = س ج - ب ج / (۱ + ا ج)

یا ج لا^۲ - ما^۲ = ب ج / (۱ + ا ج)

اس کا نادر حل ہے لا ± √-ا ما = ± √ب

جو چار خطوط مستقیم ہیں۔

مثال ۵۔ (۱ + ا لا^۲) (د^۲ ما / د لا^۲) + ا لا (د ما / د لا) + ق^۲ ما = ۰ کو حل کرو

فرض کرو کہ مساوات کو ہم اس طرح تبدیل کرتے ہیں کہ

$$\text{د ت} = \frac{\text{د ما}}{\sqrt{1+\text{ا لا}^2}}$$

اس طرح لا سیدھے تکمل سے بطور ت کے تفاعل کے معلوم ہوسکتا ہے

اب $$\frac{\text{د ما}}{\text{د لا}} = \frac{\frac{\text{د ما}}{\text{د ت}}}{\sqrt{1+\text{ا لا}^2}}$$

اور $$\frac{\text{د}^2\text{ما}}{\text{د لا}^2} = \frac{\frac{\text{د}^2\text{ما}}{\text{د ت}^2}}{1+\text{ا لا}^2} - \frac{\text{د ما}}{\text{د ت}}\;\frac{\text{ا لا}}{(1+\text{ا لا}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

پس $$(1+\text{ا لا}^2)\frac{\text{د}^2\text{ما}}{\text{د لا}^2} = \frac{\text{د}^2\text{ما}}{\text{د ت}^2} - \text{ا لا}\,\frac{\text{د ما}}{\text{د ت}} \times \frac{\text{د ت}}{\text{د لا}}$$

پس مساوات معلومہ اس طرح کی مساوات $\frac{\text{د}^2\text{ما}}{\text{د لا}^2} + \text{ق}^2\,\text{ما} = 0$ میں تحویل ہو جاتی ہے، جس کا حل ہے

$$\text{ما} = \text{ا جب ق ت} + \text{ب جم ق ت}$$

اور جب ت کی قیمت لا کی رقوم میں مندرج کی جاتی ہے تو حل معلوم حاصل ہوتا ہے۔

[اگر ا مثبت ہو تو

$$\text{د ت} = \frac{1}{\sqrt{\text{ا}}}\,\frac{\text{د لا}}{\sqrt{\frac{1}{\text{ا}}+\text{لا}^2}}$$

$$\text{ت} = \frac{1}{\sqrt{\text{ا}}}\,\text{جبز}^{-1}\left(\text{لا}\sqrt{\text{ا}}\right)$$

اگر ا منفی ہو تو $$\text{د ت} = \frac{1}{\sqrt{-\text{ا}}}\,\frac{\text{د لا}}{\sqrt{-\frac{1}{\text{ا}}-\text{لا}^2}}$$

یعنی $\frac{1}{\sqrt{-\text{ر}}}$ جب$^{-1}$ (لا $\sqrt{-\text{ر}}$) = ت]

مثال ۶ - ذیل کی ہمزاد تفرقی مساواتوں کو حل کرو (جو مستقل سروں والی خطی مساواتیں ہیں)

$$\text{۴}\ \frac{\text{ڈلا}}{\text{ڈت}} + \text{۹}\ \frac{\text{ڈما}}{\text{ڈت}} + \text{۴۴ لا} + \text{۴۹ ما} = \text{ت}$$

$$\text{۳}\ \frac{\text{ڈلا}}{\text{ڈت}} + \text{۷}\ \frac{\text{ڈما}}{\text{ڈت}} + \text{۳۴ لا} + \text{۳۸ ما} = \text{و}^{\text{ت}}$$

ہم ان مساواتوں کو اس طرح لکھ سکتے ہیں ، عف ، $\frac{\text{ڈ}}{\text{ڈت}}$ کی بجائے لکھا گیا ہے

$$\text{(۴ عف + ۴۴) لا + (۹ عف + ۴۹) ما = ت}$$

$$\text{(۳ عف + ۳۴) لا + (۷ عف + ۳۸) ما = و}^{\text{ت}}$$

ان مساواتوں پر بالترتیب ۷ عف + ۳۸ اور ۹ عف + ۴۹ کے ساتھ عمل کرنے اور تفریق کرنے سے ہم ما کو ساقط کرتے ہیں اور حاصل ہوتا ہے

$$\text{[(۴ عف + ۴۴)(۷ عف + ۳۸) - (۳ عف + ۳۴)(۹ عف + ۴۹)] لا}$$
$$= \text{۷ + ۳۸ ت - ۵۸ و}^{\text{ت}}$$

$$\text{یا (عف}^{\text{۲}}\text{ + ۷ عف + ۶) لا = ۷ + ۳۸ ت - ۵۸ و}^{\text{ت}}$$

جس سے ملتا ہے

$$\text{لا = ا و}^{\text{-ت}}\text{ + ب و}^{\text{-۶ت}}\text{ + }\frac{\text{۱}}{\text{عف}^{\text{۲}}\text{ + ۷ عف + ۶}}\text{ (۷ + ۳۸ ت - ۵۸ و}^{\text{ت}}\text{)}$$

$$\text{یا لا = ا و}^{\text{-ت}}\text{ + ب و}^{\text{-۶ت}}\text{ + }\frac{\text{۷}}{\text{۶}}\text{ + }\frac{\text{۱۹}}{\text{۳}}\text{ (ت - }\frac{\text{۷}}{\text{۶}}\text{) - }\frac{\text{۲۹}}{\text{۷}}\text{ و}^{\text{ت}}$$

ما کو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{\text{ڈما}}{\text{ڈت}}$ کو اصلی مساواتوں سے ساقط

کرتے ہیں، پہلی مساوات کو ۷ سے اور دوسری کو ۹ سے ضرب دو اور تفریق کرو، اس سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{۲لا} + \text{ما} = \text{۷ت} - \text{۹}\,\text{و}^{\text{ت}}$$

$$\text{پس ما} = \text{۷ت} - \text{۹}\,\text{و}^{\text{ت}} - \text{۲لا} - \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}}$$

$$= \text{۷ت} - \text{۹}\,\text{و}^{\text{ت}} - \text{۲}\left(\text{ا}\,\text{و}^{-\text{ت}} + \text{ب}\,\text{و}^{-\text{۶ت}} + \frac{۱۹}{۳}\text{ت} - \frac{۵۶}{۹} - \frac{۲۹}{۷}\text{و}^{\text{ت}}\right)$$

$$-\left(-\text{ا}\,\text{و}^{-\text{ت}} - \text{۶ب}\,\text{و}^{-\text{۶ت}} + \frac{۱۹}{۳} - \frac{۲۹}{۷}\text{و}^{\text{ت}}\right)$$

$$= -\text{ا}\,\text{و}^{-\text{ت}} + \text{۴ب}\,\text{و}^{-\text{۶ت}} + \frac{۵۵}{۹} - \frac{۱۷}{۳}\text{ت} + \frac{۲۴}{۷}\text{و}^{\text{ت}}$$

$$\text{پس لا} = \text{ا}\,\text{و}^{-\text{ت}} + \text{ب}\,\text{و}^{-\text{۶ت}} + \frac{۱۹}{۳}\text{ت} - \frac{۵۶}{۹} - \frac{۲۹}{۷}\text{و}^{\text{ت}}$$

$$\text{ما} = -\text{ا}\,\text{و}^{-\text{ت}} + \text{۴ب}\,\text{و}^{-\text{۶ت}} - \frac{۱۷}{۳}\text{ت} + \frac{۵۵}{۹} + \frac{۲۴}{۷}\text{و}^{\text{ت}}$$

[طالب علم $\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}}$ کے اسقاط کا بغور ملاحظہ کرے، اس طرح زیادہ مستقلات کو شریک کرنے کی ضرورت نہیں پڑتی]

مثال ۷۔ ذیل کی ہمزاد مساواتوں کو حل کرو

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرت}^{۲}} + ۳\frac{\text{فرما}}{\text{فرت}} + \text{۱۲ لا} = ۰$$

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرت}^{۲}} - ۵\frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} + \text{۹ما} = ۰$$

یہ مساواتیں اس طرح بھی لکھی جاسکتی ہیں

(عف^2 + ۱۲) لا + ۳ عف ما = ۰

- ۵ عف لا + (عف^2 + ۹) ما = ۰

ان مساواتوں پر بالترتیب عف^2 + ۹ اور ۳ عف کے ساتھ عمل کرنے اور تفریق کرنے سے ہم ما کو ساقط کرتے ہیں اور حاصل کرتے ہیں

[(عف^2 + ۱۲) (عف^2 + ۹) + ۱۵ عف^2] لا = ۰

یا (عف^4 + ۳۶ عف^2 + ۱۰۸) لا = ۰

یعنی (عف^2 + ۴) (عف^2 + ۲۷) لا = ۰

جس سے لا = ا جب ۲ ت + ب جم ۲ ت + ج جب ۶ ت + د جم ۶ ت

ما کے تفرقی سروں کو ساقط کرنے کے لئے پہلی مساوات کو تفرق کرو اور دوسری کے سہ چند کو اس سے تفریق کرو، اس طرح ملیگا

$$\frac{\text{فر}^3\text{لا}}{\text{فرت}^3} + ۳۱ \frac{\text{فرلا}}{\text{فرت}} = ۲۷ \text{ ما}$$

جس سے ہمیں ما کی قیمت حاصل ہوتی ہے (بغیر نئے مستقلوں کو شریک کرنے کے)

$$\text{ما} = -۲ \text{ب جب ۲ ت} + ۲ \text{ا جم ۲ ت} + \frac{۱۰}{۹} \text{د جب ۶ ت} - \frac{۱۰}{۹} \text{ج جم ۶ ت}$$

امثلہ

$$۱- \ ۲ \text{ لا ما} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - (۱ - \text{لا}) \text{ما}^2 = \text{لا}^4$$

$$۲- \ \text{قط}^2 \text{ما} \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + ۲ \frac{\text{جب ما}}{\text{جم}^3\text{ما}} \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2 + \text{مس ما} = \text{لا}$$

$$۳- (\text{ا} + \text{ب لا})^2 \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \text{د} (\text{ا} + \text{ب لا}) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ب ما} = \text{لا}$$

$$۴- (۱ + \text{لا}^2)^2 \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + ۲ \text{ لا} (۱ + \text{لا}^2) \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = ۰$$

۵- $(۱ - لا^{۲}) \frac{ف^{۲} ما}{ف لا^{۲}} - لا \frac{ف ما}{ف لا} + ن^{۲} ما = ۰$

۶- $\frac{ف ما}{ف لا} = و^{لا - ما} (و^{لا} - و^{ما})$

۷- $\frac{ف ما}{ف لا} = ۲ جب \frac{لا - ما}{۲} جم \frac{لا + ما}{۲} \quad \frac{جم لا}{جم ما}$

۸- ذیل کی تفرقی مساواتوں کے تکملی حاصل کرو

(ا) $\frac{ف^{۳} ما}{ف لا^{۳}} - ۳ \frac{ف^{۲} ما}{ف لا^{۲}} + ۹ \frac{ف ما}{ف لا} + ۱۳ ما = ۰$

(ب) $\frac{ف^{۲} ما}{ف لا^{۲}} + ۶ \frac{ف ما}{ف لا} + ۹ ما = ۲۵ جم لا$

(ج) $لا^{۲} \frac{ف^{۲} ما}{ف لا^{۲}} - ۵ لا \frac{ف ما}{ف لا} + ۱۰ ما = ۰$ [آئی، سی، ایس ۱۸۹۴]

۹- ذیل کی ہمزاد مساواتوں کے نظام کو حل کرو

$$\frac{ف^{۲} ما}{ف لا^{۲}} + ۱۵ ما + ۳ ی + ۳۰ = ۰$$

$$\frac{ف^{۲} ی}{ف لا^{۲}} + ۲ ما + ۱۰ ی + ۴ = ۰$$ [آئی، سی، ایس ۱۸۹۴]

۱۰- اُس منحنی کی شکل معلوم کرو جس میں رواں مماس کے میلان کا مماس محور لا کے ساتھ اُس نقطہ کے محددوں کے حاصل ضرب کے متناسب ہے۔

۱۱- ایک منحنی میں کسی نقطہ پر کا انحنا ایسے بدلتا ہے جیسے اُس زاویہ کی جیب التمام کا مکعب جو نقطہ مذکورہ پر کا مماس محور لا کے ساتھ بناتا ہے، منحنی کی صورت معلوم کرو۔

۱۲- جس منحنی میں انحنا کے نصف قطر کا ظل محور ما پر مستقل ہو

اس کے لئے ثابت کرو کہ

(۱) س = لوک مس $\left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{سا}}{۲}\right)$

(۲) ما = لوک قط $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$

نوٹ۔ (۱) میں س قوس کا طول ہے اور سا مماس کا میلان ہے محور لا کے ساتھ۔

جوابات

صفحہ (۶)

۱۔ لا مس لا ۔ لوک قط لا = ما مس ما ۔ لوک قط ما + ج

۲۔ $\frac{\text{لا}^{3} - \text{ما}^{3}}{3} + \frac{\text{لا}^{2} - \text{ما}^{2}}{2}$ + لا ۔ ما = ج

۳۔ ۲ لا ما + لا + ما + ج (لا + ما + ۱) = ۱

۵۔ لوک $\sqrt{1 + \text{ما}^{2}}$ = لوک لا + مس$^{-1}$ لا + ج

۶۔ ۳ (وَ ۔ و$^{\text{لا}}$) = لا^{3} + ج

۹۔ (۱) ما = ج و$^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}$ (۲) ما^{2} = ۲ ا لا + ج

(۳) ر (ج ۔ طہ) = ا (۴) ر = ا طہ + ج

۱۰۔ لا = $\sqrt{\text{ا}^{2} - \text{ما}^{2}}$ + $\frac{\text{ا}}{2}$ لوک $\frac{\text{ا} - \sqrt{\text{ا}^{2} - \text{ما}^{2}}}{\text{ا} + \sqrt{\text{ا}^{2} - \text{ما}^{2}}}$ اگر ما = ا جبکہ لا = ۰

صفحہ (۱۱)

۱۔ ۲ ما و$^{\text{مس}^{-1}\text{لا}}$ = و$^{2\,\text{مس}^{-1}\text{لا}}$ + ج

۲۔ (ا^{2} + ب^{2}) ما = ا جب ب لا ۔ ب جم ب لا + ج و$^{-\text{ا لا}}$

۳- ر طہ = ا $\frac{\text{طہ}^{\text{ن}+۲}}{\text{ن}+۲}$ + ج

۴- ۲ لا ما = ما^۲ + ج   ۵- لا و^{مس^{-۱} ما} = مس^{-۱} ما + ج

۶- ما و^{۲ لا√} = ۲ لا√ + ج   ۸- لا^۲ + ما^۲ + ر لا + $\frac{\text{ر}^۲}{۲}$ = ج و^{-۲ لا/ر}

۹- $\frac{۱}{\text{لا ما}}$ = $\frac{۱}{۲\text{لا}^۲}$ + ج   ۱۰- $\left(\frac{۱}{\text{لا ما}}\right)^{\text{ن}-۱}$ = $\frac{۱}{۲\text{لا}^{۲(\text{ن}-۱)}}$ + ج

۱۱- $\frac{۱}{\text{ما}^{\text{ن}-۱}}$ = ۱ + ج و^{(ن-۱) لا^۲/۲}   ۱۲- $\frac{۱}{\text{لا جب ما}}$ = $\frac{۱}{۲\text{لا}^۲}$ + ج

۱۳- $\frac{۱}{\text{لا لوک ی}}$ = $\frac{۱}{۲\text{لا}^۲}$ + ج   ۱۴- و^{(ن-۱) ی} = ۱ + ج و^{(ن-۱) لا^۲/۲}

۱۵- $\frac{۱}{\text{ر}}$ = $\frac{۱}{\text{ر}}$ + ج و^{طہ}   ۱۶- $\frac{۱}{\text{ر}^{\text{ن}-۱}}$ = $\frac{۱}{\text{ر}^{\text{ن}-۱}}$ + ج و^{(ن-۱) طہ}

۱۸- (۱) $\frac{\text{و}^{\text{ما}}}{\text{لا}}$ = $\frac{۱}{۲\text{لا}^۲}$ + ج   (۲) (ا^۲ + ب^۲) و^{ما} = ا جب لا - ب جم ب لا + ج و^{-ب لا}

(۳) $\frac{\text{جب ما}}{۱+\text{لا}}$ = و^{لا} + ج   (۴) ف (ما) + فہ (لا) + ۱ = ج و^{فہ (لا)}

صفحہ (۱۷)

۱- $\frac{۱}{۲}$ لوک (و^۲ + و - ۱) + $\frac{۱}{۲\sqrt{۵}}$ لوک $\frac{۲\text{و}+۱-\sqrt{۵}}{۲\text{و}+۱+\sqrt{۵}}$ + لوک لا = ج جہاں و = $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$

۲- $\frac{۱}{۲}$ لوک (۲ و^۲ + و - ۳) + $\frac{۹}{۲\sqrt{۲۴}}$ لوک $\frac{۱۲\text{و}+۱-\sqrt{۲۴}}{۱۲\text{و}+۱+\sqrt{۲۴}}$ + لوک لا = ج

جہاں و = ما / لا

۳- ۱/لا - ۱/ما = ج　　۴- ع حاصل اسقاط ما = لا (ع + ع^{۳}) اور لا = ج/ع^{۲} و$^{۱/۲ع^{۲}}$ کا

۵- ع حاصل اسقاط ذیل کی مساواتوں کا

ما = لا (ا ع^{۲} + ب ع + ج)

اور لوک لا {ا ع^{۲} + (ب - ۱) ع + ج}

+ ۲ / √(۴ ا ج - (ب - ۱)^{۲}) مس$^{-۱}$ (۲ ا ع + ب - ۱) / √(۴ ا ج - (ب - ۱)^{۲}) = مستقل

صفحہ (۲۰)

۱- (ما - لا)^{۵} = ج (ما + لا)　　۲- (ما - لا)^{۳} = ج (ما + لا - ۲)

۳- (۲ + √۳) / (۲ √۳) لوک (ما/(لا - ۱) + ۱ - √۳) - (۲ - √۳) / (۲ √۳) لوک (ما/(لا - ۱) + ۱ + √۳)

+ لوک (لا - ۱) = ج

۴- (ا + ب) لوک (ما - لا + ۱) + (ا - ب) لوک (ما + لا - ۱) = ج

۵- لا - ما + لوک (لا + ما) = ج

۶- ۲ ما - ۳ لا = لوک (۳ لا + ۳ ما + ۲) + ج

۷- ۳ لا^{۲} + ۴ لا ما + ۳ ما^{۲} - ۱۰ لا - ۱۰ ما + ج = ۰

۸- لا + ما - ۴ لوک (۲ لا + ۳ ما + ۷) = ج

صفحہ (۲۵)

۱۔ ما^۲ + ۱ = ج و^{۲لا}

۲۔ ما = لا^۲/۲ + لوک لا + ج

۳۔ ما + ۲/۳ (ا + لا)^{۳/۲} − ۲ ا (ا + لا)^{۱/۲} = ج

۴۔ لا (لا + ۲ ا)^۳ = ج و^{۲ما/ا}

۵۔ ۴ ا لا = ما^۲ + ۳ ا ما − ۳ا^۲/۲ لوک (۲ ما + ا) + ج

۶۔ جم { (√(۱ − (ا − لا)^۲) − ما) / (ا − لا) } = ا − لا

۷۔ لا = ۳/۲ ا ع^۲ + ۲ ب ع + ج
ما = ا ع^۳ + ب ع^۲

۸۔ ما = ۳/۲ ا ق^۲ + ۲ ب ق + ج
لا = ا ق^۳ + ب ق^۲

صفحہ (۲۸)

۱۔ ما = ج لا + ج^۲ ، لا^۲ + ۴ ما = ۰

۲۔ ما = ج لا + ج^۳ ، ۲۷ ما^۲ + ۴ لا^۳ = ۰

۳۔ ما = ج لا + ج^ن ، ن^ن ما^{ن−۱} + (ن − ۱)^{ن−۱} لا^ن = ۰

۴ — م = ج لا + $\sqrt{ا^2 ج^2 + ب^2}$ ، $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{م^2}{ب^2} = ۱$

۵ — م = (لا − ا) ج − ج^۲ ، (لا − ا)^۲ = ۴ م

۶ — (م − ج لا) (ج − ۱) = ج ، $\sqrt{لا} + \sqrt{م} = ۱$

صفحہ (۳۰)

۱ — م = ع^۲ لا + ع ، لا = $\frac{لوگ ع − ع + ج}{(ع − ۱)^2}$

۲ — م = ا ع لا + ع^۲ ، لا = $\frac{۲ ع}{۱ − ۲ ا} + ج ع^{\frac{ا}{۱ − ا}}$

۳ — م = ع^۲ لا + ع^۳ ، لا (ع − ۱)^۲ = − ع^۳ + $\frac{۳}{۲}$ ع^۲ + ج

۴ — م = (ع + ع^۲) لا + $\frac{۱}{ع}$ ، ع^۲ لا = ۱ + ا و^$\frac{۱}{ع}$

۵ — م = (ع + ع^ن) لا + $\frac{۱}{ع^{ن − ۱}}$ ، ع^ن لا = (ن − ۱) + ا و^$\frac{۱}{(ن − ۱) ع^{ن − ۱}}$

۶ — م = ۲ ع لا + ع^ن ، ع^۲ لا = − $\frac{ن}{ن + ۱}$ ع^{ن + ۱} + ا

۷- $ما = ا ع لا + ب ع^{۲}$

$لا ع^{\frac{ا}{ا-۱}} = - \frac{۳ب}{۳ا-۲} ع^{\frac{۳ا-۲}{ا-۱}} + ج$

۸- قائم زائد

۹- مکانی جو محوروں کو مس کرتا ہے ۱۰- قطع زائد

۱۱- چار قرنوں والا در تدویر $لا^{\frac{۲}{۳}} + ما^{\frac{۲}{۳}} = ا^{\frac{۲}{۳}}$

۱۲- $۸ما = (۲لا - ۱)^{۲}$

۱۳- $ما = ا و^{لا} + ج_{۱} (۱ + و^{۲})^{\frac{۳}{۲}}$

$ما = ج_{۱} \frac{۳ جب^{۲} ط - ۱}{جم^{۳} ط}$

$لا = لوک \frac{۲ ج_{۱} جب ط}{جم^{۲} ط}$

۱۴- $ما^{۲} = ج لا^{۲} - \frac{ب ج}{ا ج + ۱}$ ، مخروطیوں کا ایک سلسلہ جو چار خطوط مستقیم $لا \pm \sqrt{-ا}\, ما = \pm \sqrt{ب}$ کو مس کرتا ہے نادر حل ہے

صفحہ (۳۶)

۱- $ما = لا لوک لا + ا لا + ب$ ۲- $ما = ا جمز (\frac{لا}{ا} + ب)$

۳- $۲ما = \frac{لا^{۲}}{۲ا} - ا لوک لا + ب$ ۴- $ما = \frac{(لا + ۳ا)^{۳}}{۲۷} + ب$

۵۔ $(\text{لا}-\text{ا})^{2}+(\text{ما}-\text{ب})^{2}=\text{ر}^{2}$　　۶۔ $\text{لا}+\text{ب}=\int\frac{\text{ور ما}}{\sqrt{\text{ا ق}^{-2\text{ما}}+\frac{1}{2}-\text{ما}}}$

۷۔ $\text{ما}+\text{ب}=\int\sqrt{\text{ا ق}^{-2\text{لا}}+\frac{1}{2}-\text{لا}}\ \text{ور لا}$

۸۔ $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}=\int\left(\frac{1}{\text{لا}}+\frac{1}{2\text{لا}^{2}}\right)\text{ق}^{-\frac{\text{لا}^{2}}{2}}\ \text{ور لا}+\text{ب}$

۹۔ $\text{ما}=\text{ب مس}\ \frac{\text{لا}+\text{ما}+\text{ا}}{2\text{ب}}$

۱۰۔ $\text{لا}+\text{ا}+\frac{\sqrt{1-\text{ما}^{2}}}{\text{ما}}+\text{جب}^{-1}\text{ما}=0$

۱۱۔ $\text{ما}=\text{ب لا}^{2}-\text{ا لا لوک لا}$

صفحہ (۴۲)

۱۔ $\text{لا}^{5}\text{ما}=\text{ق}^{\text{لا}}+\text{ا لا}^{2}+\text{ب لا}+\text{ج}$

۲۔ $(\text{لا}^{2}+\text{جب لا})\,\text{ما}=\text{جم لا}+\text{ا لا}^{2}+\text{ب لا}+\text{ج}$

۳۔ (ا) $\text{لا}^{3}\text{ما}_{3}-3\text{لا}^{2}\text{ما}_{2}+6\text{لا ما}_{1}+(\text{لا}-6)\text{ما}=\text{ق}^{\text{لا}}+\text{ا}$

(ب) $\text{لا ما}_{2}-\text{ما}_{1}+\frac{\text{ما}}{\text{لا}}=\text{ق}^{\text{لا}}+\text{ا}$

(ج) $\text{لا}^{5}\text{ما}_{5}-4\text{لا}^{4}\text{ما}_{4}+16\text{لا}^{3}\text{ما}_{3}-48\text{لا}^{2}\text{ما}_{2}+96\text{لا ما}_{1}-96\text{ما}$

$+\frac{1}{2}(\text{لا}^{2}+\text{ما}^{2})=\text{لا}(\text{لوک لا}-1)+\text{ا}$

صفحہ (۵۵)

اس نمبری کے جوابات میں ا، ب، ج وغیرہ اختیاری مستقل ہیں۔

۱۔ $م = ا_1 و^{ولا} + ب_1 و^{ب لا}$ ۲۔ $م = ا_1 و^{ولا} + ب_1 و^{۲ولا} + ج_1 و^{۳ولا}$

۳۔ $م = ا_1 و^{لا} + ب_1 و^{۳لا} + ج_1 و^{۵لا}$ ۴۔ $م = (ا_1 + ب_1 لا) و^{لا} + ج_1 و^{-۲لا}$

۵۔ $م = ا_1 و^{لا} + ب_1 و^{-\frac{لا}{۲}} جب \frac{لا\sqrt{۳}}{۲} + ج_1 و^{-\frac{لا}{۲}} جم \frac{لا\sqrt{۳}}{۲}$

۶۔ $م = ا_1 و^{لا} + ب_1 و^{-لا} + ج_1 جب لا + د_1 جم لا$

۷۔ $م = (ا_1 + ب_1 لا) و^{لا} + (ج_1 + د_1 لا + ع_1 لا^{۲}) و^{ولا}$

۸۔ $م = ا_1 جب لا + ب_1 جم لا + ج_1 و^{-\frac{لا}{۲}} جب \frac{لا\sqrt{۳}}{۲} + د_1 و^{-\frac{لا}{۲}} جم \frac{لا\sqrt{۳}}{۲}$

۹۔ $م = (ا_1 + ب_1 لا) جب لا + (ج_1 + د_1 لا) جم لا + (ع_1 + ف_1 لا) و^{لا}$

۱۰۔ $م = (ا_1 + ب_1 لا + ج_1 لا^{۲}) جب لا + (د_1 + ع_1 لا + ف_1 لا^{۲}) جم لا$

$+ (گ_1 + ھ_1 لا) و^{-\frac{لا}{۲}} جب \frac{لا\sqrt{۳}}{۲} + (س_1 + ص_1 لا) و^{-\frac{لا}{۲}} جم \frac{لا\sqrt{۳}}{۲}$

۱۱۔ $م = (ا_1 + ب_1 لا + ج_1 لا^{۲}) و^{لا} + د_1 و^{ولا} + (ع_1 + ف_1 لا) و^{-لا} جب لا$

$+ (گ_1 + ھ_1 لا) و^{-لا} جم لا$

۱۲ — ما = (ا + ب لا) جب ۲لا + (ج + د لا) جم ۲لا + ع جب ب لا
+ ف جم ب لا + گ و جب + ھ و جم
+ س و جب + ص و جم

صفحہ (۵۹)

۱ — (۱) $\frac{و^{لا}}{۴}$ (۲) $\frac{و^{۲لا}}{(۱+۱)(۲+۱)}$ (۳) $\frac{و^{لا}}{۱۲۰} + \frac{و^{-لا}}{۱۲۰}$

صفحہ (۶۲)

($\frac{لا}{و}$) لوک و لا و، لا جب و ـ ، $\frac{و^{لا} لا^{۵}}{۶۰}$

صفحہ (۶۳)

۱ — و^لا (ا۲ + ب۲)^-۱/۲ جم (ب لا ـ مس^-۱ $\frac{ب}{ا}$)

$\frac{و^{لا}}{۲}$ ـ $\frac{و^{لا}}{۲\sqrt{۵}}$ جم (۲لا ـ مس^-۱ ۲)

$\frac{و^{لا}}{۴}$ { $\frac{۳}{۲\sqrt{۲}}$ جب (لا ـ $\frac{\pi}{۴}$) ـ $\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$ جب (۳لا ـ مس^-۱ ۳) }

$\frac{۱}{۲}$ (جب لا جمز لا ـ جم لا جبز لا)

۲ – – ۱/۲ جب ۲ لا ، ۱/۲ جم لا ، – ۳/۱۶ جب ۲ لا

صفحہ (۶۵)

قو^لا (جب لا – جم لا) ، قو^لا [۴ و(و^۲ – ۱) جب و لا + (و^۴ – ۶و^۲ + ۱) جم و لا] / [و(و^۲ + ۱)]

۲ – جم لا جمز لا

صفحہ (۶۷)

۱ – لا^۲/۲ – ۳/۲ لا + ۷/۴ ، – لا^۲/۲ – لا ، لا^۳/۶ + لا^۲

۲ – قو^لا (لا^۲/۶ – ۵/۱۸ لا + ۱۹/۱۰۸) ، قو^لا (لا^۲/۴ – لا/۲) + قو^لا (لا/۴ + ۳/۸)

۳ – ۱/۲ قو^لا (لا جب لا + جم لا) – قو^{-لا}/۱۰ {(۲لا + ۳/۵) جم لا – (لا + ۴/۵) جب لا}

صفحہ (۷۲)

۱ – (۱) – لا جم لا/۲ (۲) لا جب ۲لا/۴ (۳) لا/۲ جمز لا

(۴) قو^لا (لا^۲/۶ – لا/۳) (۵) لا قو^لا/۲ (۶) لا/۴ (جمز لا + جم لا)

(۷) لا/۲(و^۲ – ب^۲) (قو^{و لا}/و – قو^{ب لا}/ب + قو^{-ب لا}/۲ب) (۸) لا/۶ جب لا جب^۲ لا/۲

۲ – (۱) ی = ۱/۱ قو^لا + ۱/۲ قو^{۲لا} + ۱/۴ قو^{۳لا}

(۲) $ما = ا_۱ و^{لا} + ا_۲ و^{-لا} + \frac{۱}{۲} لا\ جیز لا$

(۳) $ما = ا_۱ جب لا + ا_۲ جم لا + \frac{۱}{۲} و^{-لا} + \frac{لا\ جب لا}{۲} + لا^۳ - ۶ لا + \frac{و^{لا}}{۵} (جب لا - ۲ جم لا)$

(۴) $ما = (ا_۱ + ا_۲ لا) و^{لا} + ا_۳ و^{-لا} + ا_۴ و^{-\frac{لا}{۲}} جب \frac{\sqrt{۳} لا}{۲} + ا_۵ و^{-\frac{لا}{۲}} جم \frac{\sqrt{۳} لا}{۲} + \frac{و^{لا}}{۷۲} (۲ لا^۳ - ۹ لا^۲)$

(۵) $ما = ا_۱ + ا_۲ لا + ا_۳ لا^۲ + ا_۴ و^{لا} + ا_۵ و^{-لا} - \frac{لا^۴}{۲۴}$

(۶) $ما = ا_۱ و^{-لا} + ا_۲ و^{لا(\sqrt{۳}+۲)} + ا_۳ و^{لا(\sqrt{۳}-۲)} + \frac{لا}{۲} و^{-لا} + لا + ۳$

(۷) $ما = ا_۱ و^{لا} + ا_۲ و^{-\frac{لا}{۲}} جم \frac{\sqrt{۳} لا}{۲} + ا_۳ و^{-\frac{لا}{۲}} جب \frac{\sqrt{۳} لا}{۲} + \frac{۱}{۲} \left\{ (لا - ۳) جم لا - لا\ جب لا \right\}$

(۸) $ما = ا_۱ و^{لا} + ا_۲ و^{-لا} - \frac{و^{لا}}{۲۵} \left\{ (۱۰ لا + ۲) جم لا + (۵ لا - ۱۴) جب لا \right\}$

(۹) $ما = ا_۱ و^{لا} + ا_۲ و^{-لا} - \frac{۱}{۵} جم لا\ جیز لا + \frac{۲}{۵} جب لا\ جیز لا + \frac{ا^{لا}}{لوک (ا + و) لوک \frac{ا}{و}}$

(۱۰) $ما = (ا_۱ + ا_۲ لا) و^{لا} + (ا_۳ + ا_۴ لا) جب لا + (ا_۵ + ا_۶ لا) جم لا$

+ ۱/۲ - ۱/۳۲ لا² جب لا + (لا² قو^لا)/۸ + لا + ۲

صفحہ (۷۵)

۱- ما = ا₁ جب (ق لوک لا) + ا₂ جم (ق لوک لا)

۲- ما = ا₁ جب (ق لوک لا) + ا₂ جم (ق لوک لا) + (لوک لا)²/ق² - ۲/ق⁴
+ لا [ق² جب (لوک لا) - ۲ جم (لوک لا)]/(ق⁴ + ۴) - [لوک لا جم (ق لوک لا)]/۲ ق

۳- ما = ا₁/لا + ا₂ √لا جب (√۳/۲ لوک لا) + ا₃ √لا جم (√۳/۲ لوک لا)
+ لا/۲ + لوک لا

۴- ما = ا₁/لا + ا₂ لا + ا₃ لا لوک لا + [لا (لوک لا)²]/۴ + لا³/۱۶

۵- ما = ا₁ جب {ق/ب لوک (ا + ب لا)} + ا₂ جم {ق/ب لوک (ا + ب لا)}

صفحہ (۸۲)

۱- ۲ لا² + ما² = ب ۳- ر = ب قو^(طہ مس عہ) ۴- ۲ب/ر = ۱ - جم طہ

صفحہ (۸۹)

۱- رکھو ما² = لا ی، ما² = لا³ - ۲ لا² + ۲ لا + ج لا قو^(-لا)

۲- رکھو مس ما = ی، مس ما = ا جم لا + ب جب لا + لا

۳- رکھو ا٫ + ب٫ لا = قو$^{\text{ی}}$ ، ما = ج (ا٫ + ب٫ لا)$^{\text{م}_1}$ + د (ا٫ + ب٫ لا)$^{\text{م}_2}$

- ا / ب ب٫ + (ا٫ + ب لا) / ب٫ (ب + ا ب٫)

جہاں م٫ ، م٢ مساوات ب٫^{2} م^2 + (ا ب٫ - ب٫^{2}) م + ب = ۰ کی اصلیں ہیں -

۴- رکھو ی = سسن$^{-1}$ لا ، ما = (ا لا + ب) / √(۱ + لا^2)

۵- رکھو ی = جب$^{-1}$ لا ، ما = ا جب (ن جب$^{-1}$ لا) + ب جم (ن جب$^{-1}$ لا)

۶- رکھو قو$^{\text{لا}}$ = ضا ، قو$^{\text{ما}}$ = عا ، (قو$^{\text{ما}}$ - قو$^{\text{لا}}$ + ۱) قو$^{\text{قو}^{\text{لا}}}$ = ا

۷- رکھو جب لا = ضا ، جب ما = عا ، (جب ما - جب لا + ۱) قو$^{\text{جب لا}}$ = ا

۸- (ا) ما = ا قو$^{-\text{لا}}$ + ب قو$^{2\text{لا}}$ جب ۳ لا + ج قو$^{2\text{لا}}$ جم ۳ لا

(ب) ما = (ا + ب لا) قو$^{3\text{لا}}$ + ۲ جم لا + $\frac{3}{2}$ جب لا

(ج) ما = ا لا^3 جب (لوک لا) + ب لا^3 جم (لوک لا)

۹- ما + ۲ = ا جب ۳ لا + ب جم ۳ لا + ج جب ۴ لا + د جم ۴ لا
۳ ی = -۲ (ا جب ۳ لا + ب جم ۳ لا) + (ج جب ۴ لا + د جم ۴ لا)

۱۰- ما = ا قو$^{\text{ک لا}^2}$　　۱۱- ما = ک لا^2 + ا لا + ب

تمت

فہرست اصطلاحات

Canonical form	صورت آئینی
Clairaut's form	کلیرو کی صورت
Commutative law	قانون مبادلہ
Complementary Function	متمم تفاعل
Complete primitive	کامل ابتدائی
Distributive law	قانون تقسیمی
Elimination	اسقاط
"Exact" Differential Equations	"ٹھیک" یا حاضر مساواتیں
Homogeneous Equations	متجانس مساواتیں
Index law	قانون قوت نما
Irreversible process	غیر انقلاب پذیر عمل
Linear Equations	خطی مساواتیں
Operator	عامل
Order	رتبہ
Orthogonal trajectory	قائم مرمی
Particular integral	خاص تکملی
Rigid Dynamics	استوار اجسام کا علم حرکت
Singular Solution	نادر حل

ترقیم

$\frac{\text{وما}}{\text{ولا}}$ ، $\frac{\text{و}^{2}\text{ما}}{\text{ولا}^{2}}$ وغیرہ	$\frac{dy}{dx}$ $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc
$\frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}}$	$\frac{dy}{dx}$
$\int$ ف (لا) ولا	$\int f(x)dx$
عف $\left(= \frac{\text{و}}{\text{ولا}}\right)$	$D\left(=\frac{d}{dx}\right)$